CULEGERI DE PROBLEME DE MATEMATICĂ SI FIZICĂ

SERIE

I. M. POPESCU, G. IONESCU, D. IORDACHE,
V. FOCHIANU, M. STAN

PROBLEME DE OPTICĂ, FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

pentru examenele de bacalaureat și admitere în învățământul superior

ION M. POPESCU, GEORGE IONESCU, DAN IORDACHE,
VASILE FOCHIANU, MIRCEA STAN

PROBLEME DE OPTICĂ, FIZICĂ ATOMICĂ ŞI NUCLEARĂ

pentru examenele de
bacalaureat şi admitere în învăţământul superior

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI

Lucrarea face parte dintr-un ciclu de patru culegeri de probleme de fizică, adresate candidaților la examenele de bacalaureat și la concursurile de admitere în învățământul superior. Din acest ciclu mai fac parte lucrările: „Probleme de electricitate" de M. Preda și P. Cristea, „Probleme de mecanică și acustică" de I. Druică și A. Popescu și „Probleme de căldură, fizică moleculară și termodinamică" de A. Hristev.

Lucrarea cuprinde probleme din următoarele capitole: optică geometrică (legile reflexiei și refracției, oglinzi, lame plan-paralele, lentile, instrumente optice), fotometrie, optică ondulatorie (interferență, difracție), optică fotonică, relativitate restrînsă, fizică atomică și nucleară (modele atomice, nucleul atomic, radioactivitate, radiații, aplicații ale tehnicii nucleare).

Problemele sînt atît de factură oarecum clasică, cît și moderne, date la ultimele concursuri. Ele sînt gradate: rezolvate, cu indicații. doar cu răspuns. La începutul fiecărui capitol se dă un breviar de formule necesare.

Se adresează elevilor școlilor medii, celor ce se pregătesc pentru bacalaureat și pentru admiterea în învățămîntul superior, precum și cadrelor didactice din învățămîntul mediu și asistenților universitari din specialitate.

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme din domeniul opticii și fizicii atomice și nucleare este destinată tuturor celor care studiază aceste capitole importante ale fizicii, elevilor, candidaților la concursurile de admitere, precum și tuturor celor care — avînd nivelul de cunoștințe al unui absolvent de liceu — doresc să studieze prin exerciții aceste capitole ale fizicii.

Lucrarea este astfel concepută încît să permită elevilor și mai ales absolvenților de liceu, care se pregătesc pentru examenele de admitere, însușirea temeinică a cunoștințelor de optică geometrică și ondulatorie, teoria relativității restrînse, optică fotonică, fizică atomică și nucleară. Prin studierea atentă a breviarelor se asigură revederea, clasificarea și sistematizarea cunoștințelor dobîndite în prealabil la aceste capitole ale fizicii. Problemele sînt astfel alese, concepute și sistematizate, încît să prezinte un grad redus, iar apoi din ce în ce mai ridicat de dificultate, contribuind în felul acesta la clarificarea, înțelegerea aprofundată și la fixarea cunoștințelor teoretice, precum și la formarea deprinderii de a depăși dificultățile și dezvolta îndemînarea de a rezolva situațiile ce pot apărea în problemele de fizică a căror rezolvare se cere, la nivelul actualelor concursuri de fizică.

Indicarea tuturor rezolvărilor sau cel puțin a rezultatelor, permite elevilor și absolvenților să lucreze independent și să-și formeze îndemînarea și iscusința necesară concursurilor.

Totodată, prin prezentarea unui material foarte variat, s-a urmărit completarea culturii generale de fizică a elevilor, menținîndu-ne totuși la nivelul și limitele programei. Cîteva probleme, avînd un grad de dificultate deosebit, au fost introduse pentru cei ce se preocupă în mod special de studiul fizicii; ele au fost indicate cu un asterisc. Numărul figurilor este cel al problemelor sau rezolvărilor la care se referă.

Lucrarea conține de asemenea un număr important de probleme cerute la concursuri în ultimii ani, împreună cu rezolvările respective.

AUTORII

Partea întîi

OPTICA

1. OPTICĂ GEOMETRICĂ

BREVIAR

Optica geometrică este un capitol al opticii, care studiază propagarea luminii pe baza noțiunii de *rază de lumină*.

1.1. Legile fundamentale ale opticii geometrice. Dioptri.

a) *Legea propagării rectilinii a luminii.* Într-un mediu transparent și omogen, lumina se propagă în linie dreaptă.

Segmentul de dreaptă de-a lungul căruia se propagă lumina se numește *rază de lumină.* Un ansamblu de raze de lumină care se propagă în același sens formează un *fascicul de lumină* (*sau fascicul luminos*). Un fascicul de lumină este *conic, homocentric sau izogen* dacă razele de lumină care îl alcătuiesc trec prin același punct; dacă razele sînt paralele, ele formează un *fascicul paralel sau cilindric.* Un fascicul conic este *convergent* dacă razele de lumină care-l compun se întîlnesc în același punct și este *divergent* dacă razele sale de lumină pornesc din același punct.

b) *Legea independenței fasciculelor de lumină.* Cînd mai multe fascicule luminoase se intersectează, ele își continuă drumul fără nici o modificare.

c) *Legea drumului invers sau a reciprocității razelor de lumină.* Parcursul unei raze de lumină este independent de sensul de propagare al luminii.

d) *Legile reflexiei luminii* *. Prin reflexie se înțelege fenomenul de întoarcere (parțială) a unei raze de lumină în mediul din care a

* Atît legile reflexiei cît și ale refracției luminii pot fi explicate în cadrul opticii fizice.

venit, atunci cînd întîlneşte suprafaţa de separaţie a două medii diferite.

Raza incidentă, SI, raza reflectată IR, unghiul de incidenţă i şi unghiul de reflexie r sînt reprezentate în figura 1.

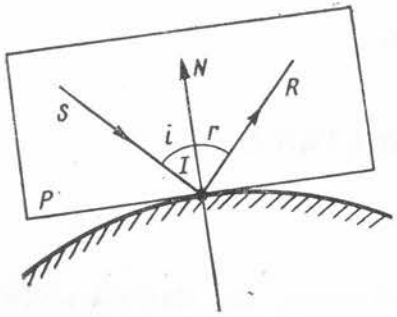


Fig. 1

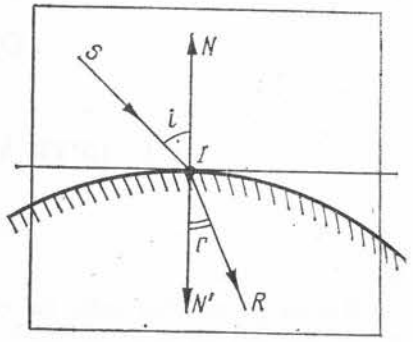


Fig. 2

Planul P determinat de direcţia razei incidente şi de normala în punctul de incidenţă se numeşte ***plan de incidenţă*** (fig. 1). Legile reflexiei determină poziţia razei reflectate cînd se cunoaşte poziţia razei incidente şi sînt următoarele :

1) Raza reflectată se găseşte în planul de incidenţă.

2) Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidenţă.

e) *Legile refracţiei luminii.* Prin refracţie se înţelege fenomenul de schimbare bruscă a direcţiei de propagare a unei raze de lumină la traversarea suprafeţei de separaţie dintre două medii transparente diferite. Unghiul r dintre raza reflectată IR şi normala IN' în punctul de incidenţă I se numeşte unghi de refracţie (fig. 2). Legile refracţiei determină poziţia razei refractate cînd se cunoaşte poziţia razei incidente şi sînt următoarele :

1) Raza refractată se găseşte în planul de incidenţă.

2) Raportul dintre sinusul unghiului de incidenţă i şi sinusul unghiului de refracţie r păstrează, pentru două medii date, o valoare constantă n care se numeşte *indice de refracţie relativ* al celui de-al doilea mediu în raport cu primul

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \cdot \qquad (1)$$

Indicele de refracţie al unui mediu transparent în raport cu vidul se numeşte *indice de refracţie absolut* * al acelui mediu.

Dacă n_1 şi n_2 sînt indicii de refracţie absoluţi a două medii oarecare, indicele de refracţie relativ n al celui de-al doilea mediu faţă de primul este egal cu raportul indicilor de refracţie absoluţi

$$n = \frac{n_2}{n_1} \qquad (2)$$

astfel încît cea de-a doua lege a refracţiei se poate scrie sub forma

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r. \qquad (3)$$

Produsul dintre indicele de refracţie absolut al unui mediu şi sinusul unghiului corespunzător este aşadar constant (invariantul lui Descartes).

Reflexia totală. La trecerea luminii dintr-un mediu cu indice de refracţie mai mare într-un mediu cu indice de refracţie mai mic, raza refractată se depărtează de normală. În acest caz există un unghi de incidenţă $l < \frac{\pi}{2}$, numit unghi limită şi definit prin relaţia

$$\sin l = \frac{n_2}{n_1} \qquad (4)$$

unde n_1 şi n_2 sînt respectiv indicele de refracţie al mediului de unde provine raza incidentă şi cel al mediului pe suprafaţa căruia se produce reflexia, astfel încît pentru unghiuri de incidenţă $i > l$ nu există rază refractată. Acest fenomen poartă denumirea de reflexie totală (fig. 3).

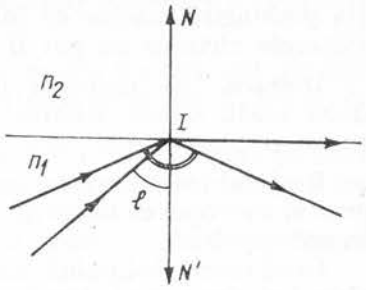


Fig. 3

Drum optic. Produsul dintre drumul geometric d străbătut de o

* Indicele de refracţie absolut al unui mediu este raportul dintre viteza c a luminii în vid şi viteza v_1 a luminii în mediul considerat

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \cdot$$

Indicele de refracţie relativ a două medii este egal cu raportul vitezei luminii v_1 respectiv v_2 în cele două medii

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot$$

rază de lumină printr-un mediu transparent şi indicele de refracţie absolut n al acelui mediu, se numeşte drum optic* (d)

$$(d) = nd. \tag{5}$$

Principiul lui Fermat permite regăsirea legilor fundamentale ale opticii geometrice şi se enunţă astfel: Parcursul real al unei raze de lumină între două puncte este acela pentru care drumul optic are o valoare minimă, maximă sau staţionară**.

Sistem optic. Un ansamblu de suprafeţe reflectătoare şi medii transparente cu indici de refracţie diferiţi separate prin suprafeţe geometrice, formează un *sistem optic.*

Stigmatismul este proprietatea unui sistem optic de a realiza o corespondenţă biunivocă între punctele obiectului şi punctele imaginii.

La trecerea printr-un sistem optic stigmatic unui punct oarecare A (punct-obiect) îi corespunde un singur punct A' (punct-imagine), cele două puncte A şi A' numindu-se *puncte conjugate.*

Un punct-obiect este real dacă razele incidente în raport cu sistemul optic considerat pleacă din acest punct; un punct-imagine este real dacă razele de lumină trec efectiv prin punctul considerat. Un punct obiect sau imagine este virtual atunci cînd se află la intersecţia prelungirii razelor de lumină. Spre deosebire de punctele reale, punctele virtuale nu pot fi prinse pe ecrane.

Dioptru. Se numeşte *dioptru* suprafaţa de separaţie dintre două medii optice diferite. După forma acestei suprafeţe dioptrul poate fi plan, sferic, etc.

Dioptrul plan este format din două medii transparente, omogene şi izotrope, cu indici de refracţie diferiţi n_1 şi n_2, separate printr-o suprafaţă plană.

Dacă razele de lumină cad aproape normal pe suprafaţa dioptrului plan, imaginea unui obiect situat într-un mediu, se formează în celălalt mediu. Imaginea este virtuală sau reală după cum obiectul este real sau virtual. Punctul-obiect şi punctul-imagine se află pe aceeaşi perpendiculară la suprafaţa dioptrului, astfel încît

$$\frac{p}{p'} = \frac{n_1}{n_2} \tag{6}$$

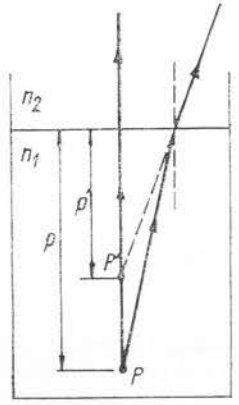


Fig. 4

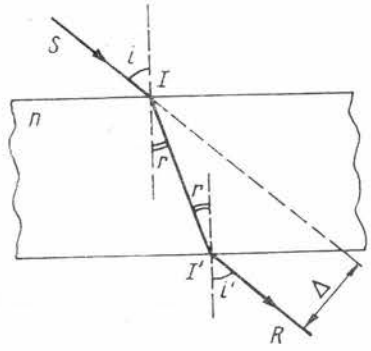


Fig. 5

unde p şi p' reprezintă distanţa obiectului, respectiv a imaginii, pînă la suprafaţa dioptrului (fig. 4).

Lama cu feţe plan-paralele este un mediu transparent limitat de două plane paralele; în mod obişnuit este o lamă aflată în aer, de grosime e şi indice de refracţie n.

Orice rază de lumină incidentă pe o lamă cu feţe plan-paralele traversează lama şi dă naştere unei raze emergente *paralelă cu cea incidentă* (fig. 5).

La ieşirea din lamă, raza emergentă suferă o *deviaţie laterală* Δ egală cu

$$\Delta = e\,\frac{\sin\,(i - r)}{\cos\,r} \tag{7}$$

unde i este unghiul de incidenţă, iar r unghiul de refracţie.

Un obiect observat aproape normal printr-o lamă cu feţe plan-paralele dă o imagine translatată faţă de obiect pe o direcţie perpendiculară pe lamă (în acelaşi sens cu lumina) cu distanţa

$$h = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{8}$$

care se mai numeşte şi *înălţare aparentă.*

---

* Dacă c este viteza luminii în vid, iar v viteza sa în mediul cu indicele de refracţie $n\left(n = \frac{c}{v}\right)$, atunci

$$(d) = c\,\frac{d}{v}\,.$$

Drumul optic este deci egal cu drumul geometric pe care l-ar străbate lumina în vid, în acelaşi interval de timp în care ea străbate distanţa respectivă în mediul dat.

** În problemele 1.1.11 — 1.1.16 principiul Fermat se va folosi sub forma (particulară) echivalentă: lumina se propagă între două puncte date, în timpul cel mai scurt.

Prisma optică este un mediu transparent limitat de două suprafeţe neparalele. Cele două plane sînt feţele prismei, iar linia lor de intersecţie formează *muchia prismei*; un plan perpendicular pe muchie se numeşte *secţiune principală a prismei*. Unghiul plan A format de feţele prismei se numeşte ***unghi refringent*** sau *unghiul prismei*. O rază luminoasă aflată în planul secţiunii principale se

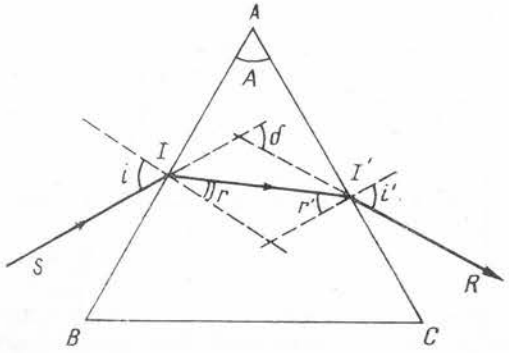


Fig. 6

refractă pe cele două feţe ale prismei, rămînînd în acelaşi plan. Mersul acestei raze este determinat de ***formulele prismei*** (fig. 6)

$$\sin i = n \sin r \tag{9a}$$

$$\sin i' = n \sin r' \tag{9b}$$

$$r + r' = A \tag{9c}$$

Unghiul de deviaţie δ al razei incidente este

$$\delta = i + i' - A \tag{10}$$

şi variază cu unghiul de incidenţă i, trecînd printr-un minim cînd raza refractată în prismă este simetrică în raport cu bisectoarea unghiului refringent.

Unghiul de deviaţie minimă δ_{min} este legat de indicele relativ n al prismei faţă de mediul înconjurător şi de unghiul A prin relaţia

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_{min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \tag{11}$$

care permite calculul indicelui de refracţie n cunoscînd A şi δ_{min}.

Pentru prisme *cu unghiul A mic* şi în cazul unui unghi de incidenţă mic, unghiul de deviaţie δ este

$$\delta = (n - 1)A. \tag{12}$$

Dioptrul sferic are următoarele elemente principale: *centrul dioptrului* (centrul suprafeţei sferice), *axa optică principală* (axa de simetrie a dioptrului) şi *vîrful dioptrului* (punctul aflat la intersecţia axei optice principale cu dioptrul). Orice dreaptă ce trece prin centrul dioptrului (cu excepţia axei de simetrie) se numeşte *axă optică secundară*. Razele de lumină ce cad pe dioptru de-a lungul unei axe optice trec nedeviate.

Focarul principal este punctul de pe axa optică principală în care converg razele care vin spre dioptru paralel cu axa optică principală. *Focarul secundar* este un punct situat pe axa optică secundară în care converg razele ce au căzut pe dioptru paralel cu axa optică secundară respectivă. Focarul dioptrului convergent este real, iar a celui divergent este virtual. Distanţa de la focarul principal pînă la vîrful dioptrului se numeşte *distanţă focală*. Planul care trece prin focarul principal şi este normal pe axa optică principală se numeşte *plan focal* (fig. 7).

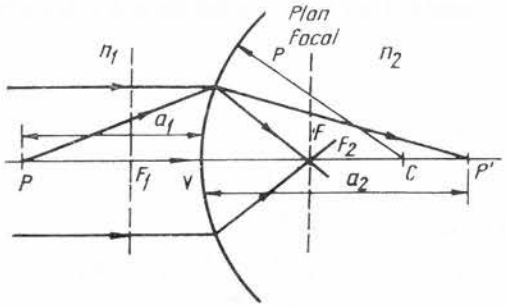


Fig. 7

Dacă mediul cu indice de refracţie mai mare se află în interiorul sferei, dioptrul este *convergent*; în caz contrar el este *divergent*.

Aproximaţia Gauss (sau a fasciculelor paraxiale) este aproximaţia potrivit căreia stigmatismul se realizează în cazul imaginilor formate cu fascicule înguste, vecine cu axa optică principală şi înclinate foarte puţin faţă de axă (fascicule paraxiale).

Legea refracției pentru dioptrul sferic convergent (legea invariantului refringent) este

$$n_1\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a_1}\right)=n_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a_2}\right) \tag{13}$$

iar pentru *dioptrul sferic divergent*

$$n_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a_1}\right)=n_1\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a_2}\right) \tag{13'}$$

unde R este raza dioptrului, n_1 și n_2 sînt indicii de refracție pentru cele două medii (la dioptrul convergent $n_1 < n_2$, la dioptrul divergent $n_1 > n_2$), iar a_1 și a_2 reprezintă distanțele pe axa optică de la vîrful dioptrului la obiect, respectiv la imagine *.

Ecuația punctelor conjugate pentru dioptrul sferic convergent este

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_2-n_1}{R} \tag{14}$$

iar pentru dioptrul sferic divergent

$$\frac{n_2}{a_1}-\frac{n_1}{a_2}=-\frac{n_1-n_2}{R} \tag{15}$$

Aceste relații reprezintă de fapt o altă formă a legii refracției pentru dioptrul sferic.

Distanțele focale obiect respectiv imagine sînt pentru dioptrul sferic convergent

$$f_1=R\frac{n_1}{n_2-n_1},\quad f_2=R\frac{n_2}{n_2-n_1} \tag{16}$$

iar pentru dioptrul sferic divergent

$$f_1=R\frac{n_2}{n_1-n_2},\quad f_2=R\frac{n_1}{n_1-n_2}. \tag{17}$$

Mărirea liniară γ se exprimă prin relația

$$\gamma=\frac{a_2}{a_1}\frac{n_1}{n_2}=\frac{i}{o}\frac{n_1}{n_2} \tag{18}$$

* Se consideră că raza incidentă se află întotdeauna în mediul mai puțin refringent.

unde i și o sînt respectiv înălțimea imaginii și a obiectului. Prin convenție mărirea este pozitivă dacă imaginea și obiectul sînt de aceeași parte a axei optice și negativă în caz contrar.

Oglinda concavă este un dioptru sferic divergent la care indicii de refracție ai celor două medii optice sînt egali și de semn contrar ($n_1 = -n_2$). În acest caz așa cum rezultă din (16)

$$f_1=f_2=f=\frac{R}{2} \tag{19}$$

și notînd $a_1 = p$, $a_2 = p'$ relația (15) devine

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}. \tag{20}$$

Aceasta reprezintă formula oglinzilor concave (ecuația punctelor conjugate). *Mărirea liniară* este în acest caz $\gamma=-\frac{p'}{p}$.

Oglinda convexă este un dioptru sferic convergent, la care indicii de refracție ai celor două medii sînt egali și de sens contrar ($n_1 = -n_2$).

La fel ca mai sus $f=\frac{R}{2}$, și notînd $a_1 = p$, $a_2 = p'$ relația (14) devine

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=-\frac{1}{f} \tag{21}$$

care este formula oglinzilor convexe. Mărirea liniară este în acest caz tot $\gamma=-\frac{p'}{p}=\frac{i}{o}$.

Formula oglinzilor sferice poate fi scrisă sub forma unică

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \tag{22}$$

cu convenția ca în cazul unui obiect, al unei imagini sau al unui focar virtual mărimea corespunzătoare p, p' sau f se consideră negativă.

Mărirea are forma generală $\gamma=-\frac{p'}{p}$ cu respectarea convenției de mai sus.

Oglinda plană este un caz limită al oglinzii convexe, cînd $R \to \infty$. În acest caz $f \to \infty$ și relația (21) conduce la

$$p=p' \tag{23}$$

adică în cazul unei oglinzi plane, imaginea este simetrică față de obiect în raport cu oglinda. Mărirea este în acest caz $\gamma = -1$.

Poziția, natura, sensul și mărimea imaginii pentru diverse poziții ale obiectului, în cazul oglinzilor sferice, pot fi urmărite în tabelele de mai jos și în fig. 8 și fig. 9 (pentru un obiect real).

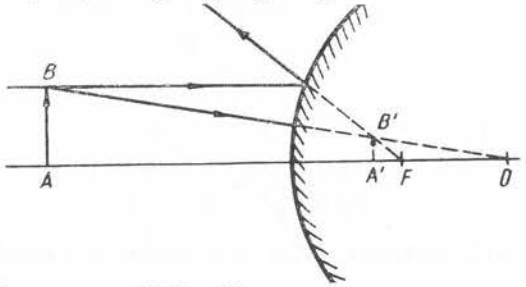


Fig. 8

a) Oglinzi concave (și lentile convergente)

	Obiect	Imagine			
	Poziție (p)	Poziție (p')	Natură	Sens	Mărire $\left(\gamma = -\frac{p'}{p}\right)$
OBIECT REAL	$p = +\infty$	$p' = f$	reală	răsturnată	$\gamma = 0$
	$2f < p < +\infty$	$f < p_1 < 2f$	reală	răsturnată	mai mică decît obiectul
	$p = 2f$	$p' = 2f$	reală	răsturnată	$\gamma = -1$
	$f < p < 2f$	$p' > 2f$	reală	răsturnată	mai mare ca obiectul
	$p = f$	$p' = \pm\infty$	reală și răsturnată (la dreapta) virtuală și dreaptă (la stînga)		Discontinuitate
	$0 < p < f$	de aceeași parte a oglinzii ca obiectul	virtuală	dreaptă	mai mare ca obiectul
	$p = 0$	$p' = 0$	reală	dreaptă	$\gamma = 1$
OBIECT VIRTUAL	$-\infty < p < 0$	între lentilă și planul focal al imaginii	reală	dreaptă	mai mică decît obiectul
	$p = -\infty$	$p' = f$	reală	dreaptă	$\gamma = 0$

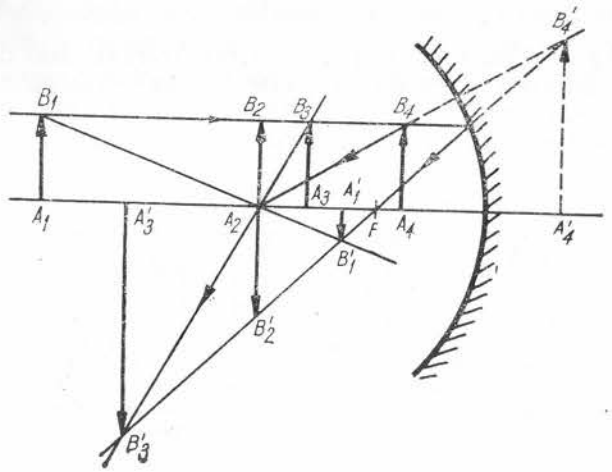


Fig. 9

b) *Oglinzi convexe* (și lentile divergente)

	Obiect	Imagine			
	Poziție (p)	poziție(p')	Natură	Sens	Mărime $\left(\gamma = -\frac{p'}{p}\right)$
OBIECT REAL	$p = +\infty$	$p' = -f$	virtuală	dreaptă	$\gamma = 0$
	$0 < p < \infty$	$-f < p' < 0$	virtuală	dreaptă	mai mică decît obiectul
	$p = 0$	$p' = 0$	reală	dreaptă	$\gamma = 1$
OBIECT VIRTUAL	$-f < p < 0$	$p' > 0$	reală	dreaptă	mai mare decît obiectul
	$p = -f$	$p' = \pm\infty$	reală și dreaptă (la stînga) virtuală și răsturnată (la dreapta)		Discontinuitate
	$-2f < p < -f$	$-2f < p'$	virtuală	răsturnată	mai mare decît obiectul
	$p = -2f$	$p' = -2f$	virtuală	răsturnată	$\gamma = -1$
	$-\infty < p < -2f$	$-2f < p' < -f$	virtuală	răsturnată	mai mică decît obiectul
	$p = -\infty$	$p' = f$	virtuală	răsturnată	$\gamma = 0$

1.2. Lentile

Lentila este un sistem optic centrat format din doi dioptri sferici sau cilindrici (unul din ei poate fi plan) care delimitează un mediu transparent* .

Diversele forme de lentile utilizate frecvent în optică sînt date în fig. 10.

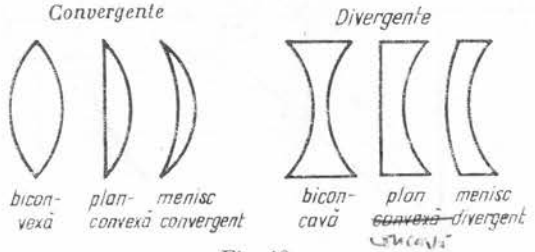


Fig. 10

Lentilele subțiri la margini și groase la mijloc se numesc *lentile convergente*. În caz contrar ele sînt *lentile divergente*.

În cazul lentilei sferice, axa de simetrie la rotație (dreapta care trece prin centrele de curbură ale fețelor) se numește *axă principală*.

Lentilele subțiri au grosimea (măsurată de-a lungul axei principale) neglijabilă față de razele de curbură ale fețelor.

Centrul optic al unei lentile subțiri este punctul central C prin care orice rază de lumină traversează lentila fără a fi deviată.

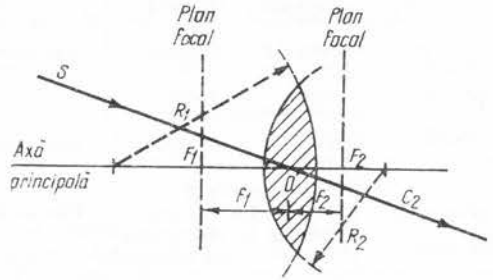


Fig. 11

Elementele unei lentile subțiri (axă optică secundară, focar principal, secundar, plan focal, distanță focală) se definesc în același mod

* Vom considera în cele ce urmează doar lentilele sferice aflate în aer sau într-un alt mediu exterior cu indice de refracție mai mic decît al materialului din care e alcătuită lentila.

ca în cazul dioptrului sferic, în raport cu centrul optic al lentilei și sînt reprezentate în fig. 11, în cazul unei lentile subțiri convergente.

Construcția geometrică a imaginii în lentile utilizează proprietățile focarelor principale și a centrului optic (fig. 12 și 13).

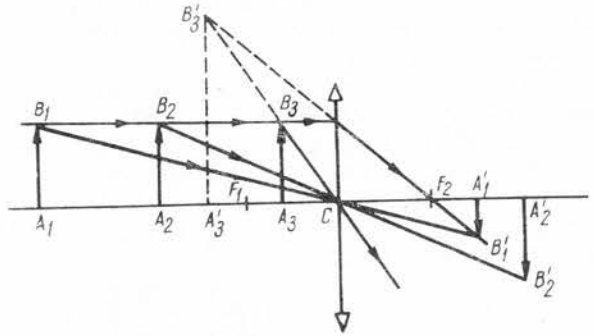


Fig. 12

Poziția, natura, sensul și mărimea imaginii pentru diversele poziții ale obiectului în cazul lentilelor sferice subțiri (convergente sau divergente) sînt identice cu cele prezentate în tabelele a) și b) în cazul oglinzilor sferice (concave și convexe).

Formulele lentilelor subțiri sînt identice cu cele din cadrul oglinzilor sferice

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \tag{24}$$

$$\gamma=-\frac{p'}{p} \tag{25}$$

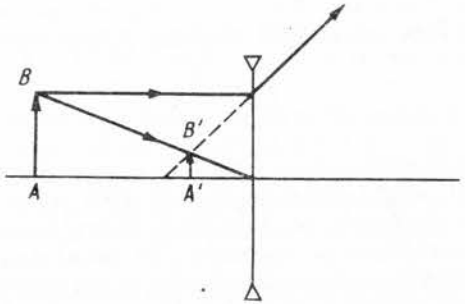


Fig. 13

unde p și p' reprezintă distanța obiectului respectiv a imaginii pînă la centrul optic, f distanța focală a lentilei, iar γ mărirea liniară.

Regula semnelor arată că p și p' sînt mărimi pozitive sau negative după cum obiectul respectiv imaginea sînt reale sau virtuale. Distanța focală f este întotdeauna pozitivă în cazul lentilelor convergente (focarele fiind reale) și negativă pentru lentilele divergente (cînd focarele sînt virtuale). Mărirea liniară este pozitivă cînd imaginea e dreaptă și negativă cînd imaginea e răsturnată.

Convergența C a unei lentile subțiri este o mărime egală cu inversul $1/f$ al valorii algebrice a distanței sale focale măsurată în metri; convergența se exprimă în dioptrii și este pozitivă sau negativă, după cum lentila e convergentă sau divergentă.

Convergența unei lentile subțiri se poate calcula în funcție de razele de curbură R și R' și indicele de refracție relativ n al lentilei față de mediul în care se află prin relația

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{26}$$

Razele de curbură R și R' se consideră pozitive sau negative, după cum fața corespunzătoare este convexă sau concavă.

Un sistem de lentile subțiri alipite este echivalent cu o singură lentilă a cărei convergență este egală cu suma algebrică a convergențelor lentilelor ce formează sistemul.

1.3. Aparate optice

Aparatele (instrumentele) optice sînt aparate prevăzute cu dispozitive (lentile, oglinzi, prisme, etc.) care dau imagini reale sau virtuale ale obiectelor.

Dintre caracteristice principale ale unui aparat optic menționăm:

a) *Puterea optică.* Este unghiul sub care se vede unitatea de lungime prin aparat. Dacă un obiect de lungime l perpendicular pe axa optică principală este văzut sub unghiul β, puterea P este

$$P = \frac{\beta}{l} \tag{27}$$

și se exprimă în dioptrii, dacă l este dat în metri.

b) *Mărirea.* În cazul aparatelor care dau imagini reale *mărirea* este *liniară* și se definește ca raportul dintre lungimea imaginii și lungimea corespunzătoare a obiectului. În cazul aparatelor care dau imagini virtuale *mărirea* este *unghiulară* (sau grosisment). Mărirea unghiulară (sau grosismentul) este egală cu raportul dintre tangenta

unghiului β sub care se vede imaginea prin aparatul optic și tangenta unghiului α sub care se vede obiectul direct, cu ochiul liber

$$G = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{28}$$

Dacă unghiurile α și β sînt mici, relația devine

$$G = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{28'}$$

Grosismentul convențional sau comercial (G_c) este

$$G_c = \frac{P}{4} \tag{29}$$

unde P este puterea optică a instrumentului optic.

c) *Puterea separatoare* (sau de rezoluție) este o mărime ce caracterizează capacitatea unui instrument optic de a pune în evidență, distinct, două puncte vecine.

Ochiul este din punct de vedere optic o lentilă subțire convergentă cu distanța focală variabilă și care dă imagini reale pe retină. În repaus ochiul normal are planul focal al imaginii pe retină.

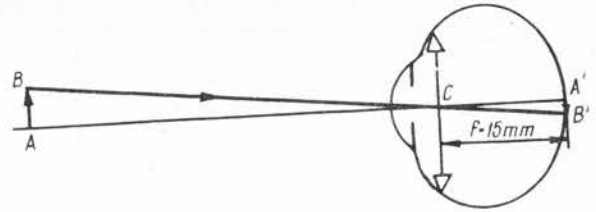


Fig. 14

Acomodarea este creșterea convergenței ochiului; cînd convergența este maximă, obiectul observat este în *punctul proximum* (sau la distanța minimă a vederii clare).

Ochiul miop are convergența mărită și nu poate distinge clar obiectele situate mai departe de un punct aflat pe axa sa optică, numit *punct remotum*. Se corijează cu o lentilă divergentă.

Ochiul hipermetrop are convergența scăzută și nu poate percepe clar nici un obiect real, fără acomodare. Se corijează cu o lentilă divergentă.

Ochiul presbit a pierdut aproape complet posibilitatea de acomodare.

Lupa este o lentilă convergentă cu distanță focală mică (2—10 cm). Obiectul se află între lupă și focar, astfel încît imaginea este virtuală, dreaptă și mai mare decît obiectul.

Puterea optică a lupei P e dată de relația generală (27), iar *grosismentul* său G depinde de puterea optică și de ochiul observatorului

$$G = P\,\delta_m \tag{30}$$

unde δ_m este distanța minimă a vederii clare.

Puterea separatoare este cea mai mică distanță d (în metri) dintre două puncte care se percep distinct prin lupă și e dată de relația

$$d = \frac{\varepsilon}{P} \tag{31}$$

unde ε este limita de separație a ochiului (în radiani) și P puterea lupei (în dioptrii).

Microscopul este un aparat optic folosit pentru observarea obiectelor foarte mici. Este compus din două sisteme optice, *obiectivul*

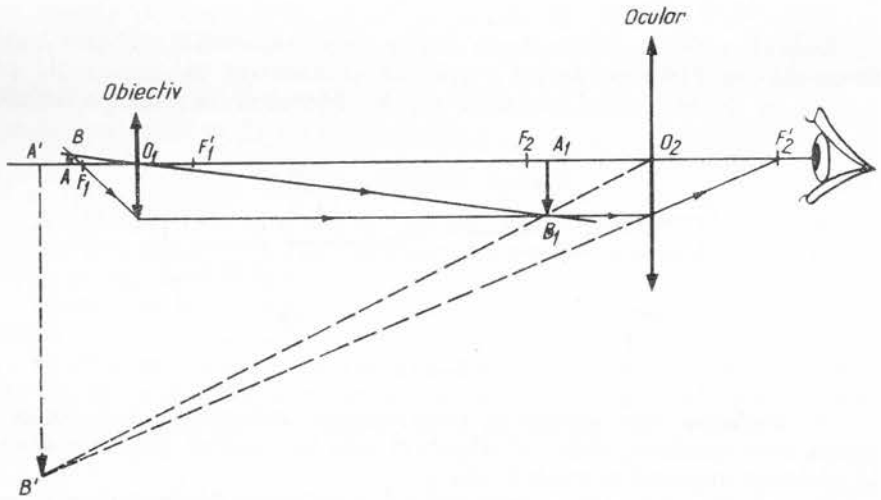


Fig. 15

și *ocularul* aflate la o distanță mare pe aceeași axă optică principală. Obiectivul formează o imagine reală răsturnată și mărită a obiectului iar ocularul dă o imagine finală virtuală și mult mărită (fig. 15).

Punerea la punct a imaginii se face deplasînd tubul microscopului (care cuprinde obiectivul și ocularul) pînă cînd obiectul se află în vecinătatea focarului obiectivului.

Puterea optică a microscopului definită prin relația (27) este egală cu produsul dintre mărirea liniară γ_{ob} a obiectivului și puterea P_{oc} a ocularului

$$P = \gamma_{ob} P_{oc}. \tag{32}$$

În cazul punerii la punct la infinit, puterea optică se numește *intrinsecă* și e dată de

$$P_i = \frac{\Delta}{f_{ob}\, f_{oc}} \tag{33}$$

unde $\Delta = F_1' F_2$ este distanța dintre focarul anterior al obiectivului și focarul posterior al ocularului (lungimea optică a microscopului), iar f_{ob} și f_{oc} sînt distanțele focale ale obiectivului și ocularului.

Grosismentul microscopului este dat de relațiile anterioare

$$G = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = P\,\delta_m,\quad G_c = \frac{P}{4}.$$

Puterea separatoare a microscopului este cea mai mică distanță dintre două puncte percepute distinct prin microscop (aproximativ 0,2 — 0,3 μm).

Luneta este un instrument optic destinat observării obiectelor îndepărtate, formînd imagini virtuale, vizibile sub un unghi aparent mărit.

A) *Luneta astronomică* (Kepler) cuprinde un *obiectiv* (asimilabil unei lentile convergente cu diametrul și distanța focală mare) care

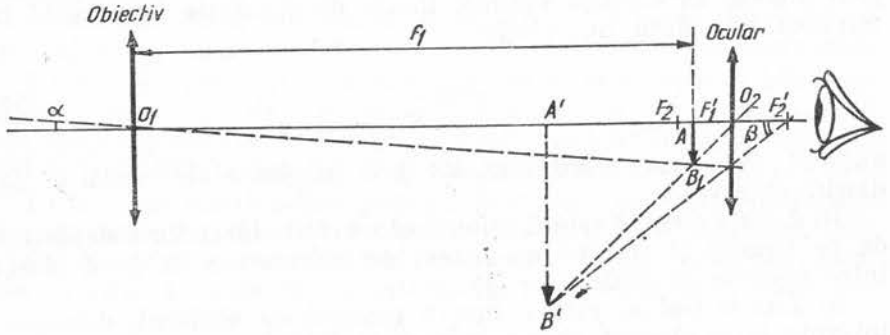


Fig. 16

formează o imagine reală și micșorată a obiectului și un *ocular* (asemănător unei lupe) care formează o imagine virtuală mărită, folosind ca obiect imaginea reală dată de obiectiv (fig. 16).

Obiectul fiind practic la infinit, imaginea se află în planul focal al obiectivului și are ca mărime valoarea

$$l = f_{ob}\,\alpha \tag{34}$$

unde f_{ob} este distanța focală a obiectivului și α diametrul aparent al obiectului.

Punerea la punct se efectuează deplasînd ocularul în raport cu obiectivul. Cînd punerea la punct se realizează pentru infinit, focarul posterior al obiectivului coincide practic cu focarul anterior al ocularului, iar luneta se comportă ca un sistem *afocal* (lunetă afocală).

Grosismentul lunetei este

$$G = \frac{\beta}{\alpha} = f_{ob}P_{oc} \tag{35}$$

unde f_{ob} și f_{oc} sînt distanțele focale ale obiectivului și ocularului, iar P_{oc} puterea optică a ocularului.

În cazul *lunetei afocale*, grosismentul se numește *intrinsec* și are valoarea

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}. \tag{36}$$

Puterea separatoare a unei lunete astronomice este caracterizată de distanța unghiulară minimă ε a două puncte observate distinct prin lunetă. În condiții optime, limita de separație (exprimată în minute) este dată de relația

$$\varepsilon \approx \frac{\lambda}{R_{ob}} \tag{37}$$

unde R_{ob} este raza obiectivului, iar λ e lungimea de undă a radiației observate.

B) *Luneta terestră* este destinată observării obiectelor îndepărtate de pe pămînt și conține un sistem de redresare a imaginii plasat între obiectiv și ocular (fig. 17).

a) *Luneta Galilei* este o lunetă terestră cu ocularul divergent interpus între obiectiv și imaginea reală dată de acesta. Imaginea finală este virtuală și dreaptă în raport cu obiectul.

b) *Binoclul lui Galilei* (binoclul de teatru) este alcătuit din două lunete Galilei identice și paralele. Are grosismentul mic, mărind de aproximativ 4 — 5 ori.

c) *Binoclul de cîmp* (sau cu prisme) cuprinde *prisme cu reflexie totală* avînd oculare convergente; are grosismentul mare, mărind de aproximativ 10 — 15 ori.

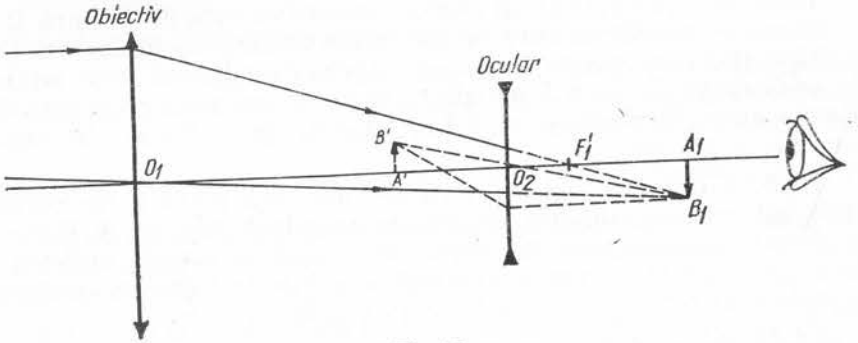


Fig. 17

* * *

1.1.1. Un om de înălțime h=1,80 m trece cu viteza v_1= 1,2 m/s sub o lampă situată la înălțimea H= 6 m. Să se determine viteza v a extremității umbrei omului pe pămînt.

1.1.2. Care este valoarea unghiului diedru φ pe care trebuie să-l facă două oglinzi plane, astfel încît o rază de lumină în urma unei singure reflexii succesive pe fiecare oglindă, să dea naștere unei raze emergente perpendiculară pe cea incidentă?

1.1.3. O rază de lumină pătrunde în interiorul unei sfere transparente cu indicele de refracție n, sub unghiul de incidență i și iese din nou în aer după trei reflexii succesive în interiorul sferei. Să se determine unghiul de deviație δ dintre raza incidentă și cea emergentă.

1.1.4. Fie un triunghi oarecare ABC și P' și P piciorul bisectoarei interioare, respectiv exterioare ale unghiului A. Să se arate că P' este imaginea punctului P într-o oglindă sferică aflată cu vîrful în C și de rază CB (latura CB fiind axa principală a oglinzii).

1.1.5. O suprafață reflectătoare reprezintă o suprafață de rotație în jurul axei Ox. Cunoscînd funcția $y = f(x)$, care generează prin rotație suprafața și distanța d dintre axa Ox și raza incidentă (paralelă cu Ox), să se determine intersecția razei reflectate cu axa Ox.
Aplicație: $y = \sqrt{6x}$, d = 30 cm.

1.1.6. Raza de curbură a unei oglinzi sferice concave este R = = 40 cm. a) Să se afle cărei poziții a obiectului îi corespunde o imagine reală și mărită de două ori. b) Să se găsească poziția căreia îi corespunde o imagine virtuală și mărită de două ori.

1.1.7. Să se calculeze raza imaginii Soarelui obținută în planul focal al unei oglinzi cu raza $R = 10$ m, știind că raza Soarelui este de 220 ori mai mică decît distanța de la Soare la Pămînt.

1.1.8. În fața unei oglinzi sferice concave cu raza de curbură $R = 20$ cm se așază un corp ce are forma unui triunghi dreptunghic ABC, astfel încît cateta AC să se situeze de-a lungul axei optice. La ce distanță de vîrful V al oglinzii se va forma imaginea și care sînt dimensiunile ei, dacă $p_1 = VA = 60$ cm, $p_2 = VC = 110$ cm și $o = AB = 10$ cm?

1.1.9. La distanța $d = 1$ m față de suprafața plană a mercurului aflat într-un vas cilindric, se găsește un punct luminos S. Unde se va forma imaginea acestui punct dacă vasul se rotește uniform în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\omega = 1$ rad/s? (Se va considera suprafața mercurului în rotație drept o calotă sferică).

1.1.10. Să se deducă legea refracției pentru dioptrul sferic convergent

$$n_1\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a_1}\right)=n_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a_2}\right)$$

și expresiile distanțelor focale f_1 și f_2.

1.1.11. Considerînd că între două puncte date lumina se propagă în timpul cel mai scurt (principiul Fermat), să se obțină legile reflexiei luminii *.

1.1.12. Să se deducă legile refracției luminii cu ajutorul principiului Fermat.

1.1.13. Folosind principiul Fermat, să se arate că două raze care pornesc din același punct și ajung în urma refracției într-un punct comun, vor avea drumurile optice egale.

1.1.14. Pe baza rezultatului problemei precedente să se deducă ecuația punctelor conjugate pentru dioptrul sferic convergent:

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_2-n_1}{R}.$$

1.1.15. Să se obțină formula oglinzilor sferice concave pe baza rezultatului problemei 1.1.13.

---

* Vezi nota de la pag. 10.

1.1.16. Să se obțină formula lentilelor sferice subțiri

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

folosind consecința principiului Fermat din problema 1.1.13.

1.1.17. O rază de lumină care cade pe suprafața plană de separație a două medii diferite cu indici de refracție n_1 și n_2, în parte se reflectă, iar în parte se refractă. Pentru ce unghi de incidență i raza reflectată face unghiul α cu cea refractată? Caz particular: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.1.18. Să se determine deplasarea Δ a unei raze de lumină care cade sub unghiul de incidență $i = 70°$ pe o placă de sticlă cu fețele plan-paralele, de grosime $e = 10$ cm și indice de refracție $n = 1{,}5$.

1.1.19. O lamă de sticlă cu grosimea $e = 3$ mm este privită prin microscop. La început microscopul se pune la punct pentru observarea feței superioare a lamei, iar apoi se deplasează în jos cu $d = 2$ mm pînă cînd se vede clar fața inferioară. Să se calculeze din aceste date indicele de refracție n al lamei.

1.1.20. O rază de lumină pătrunde într-o lamă cu fețele plan-paralele, de grosime e, sub unghiul de incidență i. Cunoscînd deplasarea d a razei emergente față de cea incidentă, să se determine indicele de refracție n al lamei.

1.1.21. Să se arate că dacă o rază de lumină traversează mai multe medii separate prin suprafețe plan paralele, direcția razei emergente depinde numai de direcția razei incidente și de indicii de refracție ai primului și ultimului mediu.

1.1.22. Sub ce unghi de incidență i trebuie să cadă un fascicul de raze paralele de lumină pe suprafața apei dintr-un vas, pentru ca umbra unui corp fixat pe fundul vasului și înclinat cu unghiul α față de orizontală, să fie de k ori mai mare decît lungimea corpului? Se cunosc indicii de refracție n ai aerului și n_1 ai apei.

1.1.23. O rază de lumină SI cade sub unghiul de incidență $i = 30°$, pe o lamă de sticlă ($n = 1{,}51$) cu fețe plan-paralele, de grosime $e = 10$ cm, astfel încît distanța de la S la lamă este $h = 12$ cm. După ce iese din sticlă, raza se proiectează pe un ecran așezat la distanța $a = 20$ cm față de sursă. Să se afle lungimea l a drumului total parcurs de raza de lumină.

1.1.24. O cuvă conține apă $\left(n = \frac{4}{3}\right)$ a cărei suprafață liberă este AB. Pe aceeași verticală OP se află un observator O, la distanța

$p_1 = 1{,}2$ m față de AB în aer și un pește P la distanța $p_2 = 0{,}8$ m față de AB, în apă. a) La ce distanță d vede observatorul peștele? La ce distanță d' vede peștele, ochiul observatorului? b) Presupunem că apa are o adîncime $e = 1{,}2$ m, iar pe fundul cuvei se află o oglindă plană CD. La ce distanță D vede observatorul propria sa imagine în oglindă? În ce sens și cu cît se deplasează imaginea dacă se golește cuva de apă?

1.1.25. O sursă de lumină pornește urcînd uniform accelerat de la baza unui strat de apă $\left(n = \frac{4}{3}\right)$ de grosime $e = 10$ cm cu accelerația constantă $a = 1$ m/s², unghiul inițial de incidență fiind $i_0 = \frac{\pi}{4}$. Se cere: a) Să se exprime $\sin r$ în funcție de timp, unghiul de refracție r fiind măsurat mereu în punctul inițial de incidență. b) După cît timp de la pornirea sursei apare reflexia totală?

1.1.26. Un cub de sticlă $ABCD$ cu indicele de refracție $n_2 = 1{,}5$ se află în apă $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$; o rază de lumină SI cade sub unghiul de incidență i pe fața AB, venind din apă (fig. 1.1.26). Care trebuie să fie valoarea maximă a unghiului i, pentru ca raza să se reflecte total pe fața BC a cubului?

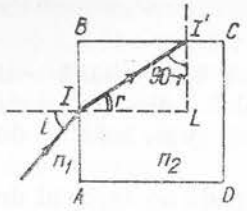


Fig. 1.1.26

1.1.27. O rază de lumină se propagă aproximativ tangențial la fața unei prisme optice, avînd sensul de la bază spre vîrful acesteia, încît o străbate sub un unghi de emergență $i_2 = 60°$. Știind că se îndeplinește condiția $\mathrm{tg}^2 r_1 = 1{,}6\ \mathrm{tg}^2 r_2$, unde r_1 este unghiul de refracție pe prima față a prismei, iar r_2 unghiul de incidență pe fața a doua, să se afle: a) indicele de refracție n al prismei; b) unghiurile r_1 și r_2.

1.1.28. Pentru un unghi de incidență i dat, să se determine condiția pe care trebuie s-o îndeplinească unghiul refringent A al unei prisme cu indicele de refracție n, astfel încît raza incidentă să poată ieși din prismă.

1.1.29. O rază luminoasă SI aflată în planul secțiunii principale ale unei prisme echilaterale ABC, traversează această prismă la deviație minimă, apoi se reflectă pe o oglindă plană M aflată în prelungirea bazei BC. a) Să se reprezinte mersul acestei raze luminoase. b) Să se arate că în urma reflexiei pe oglinda M, raza emergentă este

paralelă cu raza incidentă SI. c) Perpendiculara OH pe raza SI formează cu bisectoarea AO a unghiului A al prismei, unghiul $\alpha = 20°$. Să se determine indicele de refracție n al prismei.

1.1.30. O prismă de sticlă cu indicele de refracție n are secțiunea principală sub forma unui triunghi dreptunghic ABC cu unghiurile $A = 90°$ și $B = 75°$; o rază luminoasă SI cade pe fața AB sub unghiul de incidență i. a) Să se găsească relația dintre i și n astfel încît raza reflectată II' să facă unghiul $\alpha = 45°$ cu fața BC a prismei. b) Ce condiție trebuie să satisfacă n, pentru ca în condițiile de la punctul a), raza II' să se reflecte total în I' pe fața BC? c) Fiind îndeplinită condiția de la punctul b), să se arate că raza $I''R$ care iese din prismă este perpendiculară pe raza incidentă SI.

1.1.31. O cuvă transparentă avînd secțiunea de forma unui triunghi echilateral ABC (cu planul bisector vertical) este plină cu un lichid de indice de refracție $n = 2$. În mijlocul I al feței AB cade o rază de lumină SI sub un unghi de incidență $i < 90°$. a) Pe ce față și sub ce unghi va ieși din prismă raza incidentă? Pentru ce unghi de incidență, raza va ieși prin suprafața BC? Care va fi în acest caz unghiul de emergență? b) Se pune în cuvă un lichid cu indicele de refracție $x < 2$; știind că deviația minimă în acest caz este $\delta = 30°$, să se calculeze indicele de refracție x.

1.1.32. O prismă de flint ($n = 1{,}6$) are planul secțiunii principale de forma unui triunghi dreptunghic isoscel ABC cu $AB = AC = 2$ cm. O sursă punctiformă S aflată în aer pe mediatoarea $SI = 50$ cm a laturii AB, trimite o rază de-a lungul acestei mediatoare. a) Care este poziția și natura imaginii S_1 a sursei S dată de dioptrul plan aer-sticlă AB? b) Care este unghiul limită λ, corespunzător celor două medii transparente? Să se arate că unghiul de incidență al oricărei raze ce pleacă din S și ajunge pe fața BC este mai mare decît acest unghi limită. Care este poziția și natura imaginii S_2 dată de S_1 în raport cu fața BC a prismei? c) Să se determine poziția și natura imaginii finale S' a punctului S prin prismă. d) Se înlocuiește prisma printr-o oglindă plană care ocupă poziția planului BC; fie S'' imaginea lui S obținută în oglindă. Să se determine distanța $P''P'$.

1.1.33. Se dau două prisme care au o față comună și un vîrf comun. Dacă α_1 și α_2 sînt unghiurile celor două prisme la vîrful comun, iar n_1 și n_2 indicii lor de refracție, să se determine sub ce unghi de incidență i_1 trebuie să intre o rază de lumină în sistemul format de cele două prisme, pentru ca la ieșire raza să aibă direcția avută în ultima prismă.

1.1.34. Care este unghiul de incidenţă i sub care trebuie să cadă o rază de lumină pe faţa AB a unei prisme ABC cu unghiul refringent A şi indicele de refracţie absolut n, pentru ca raza emergentă să fie perpendiculară:

a) pe raza incidentă,
b) pe faţa AC,
c) pe faţa AB?

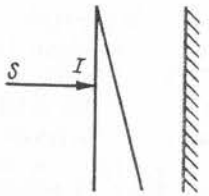


Fig. 1.1.35

1.1.35. O prismă cu unghiul refringent mic ($A = 4°$) şi indicele de refracţie $n = 1{,}5$ se află în faţa unei oglinzi plane verticale; asupra sistemului cade o rază orizontală SI (fig. 1.1.35). Să se calculeze unghiul de incidenţă al acestei raze pe oglindă şi unghiul de deviaţie totală.

1.1.36. Să se arate că în cazul unei prisme există relaţia

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+\delta)}{\sin\frac{1}{2}A} = n\,\frac{\cos\frac{1}{2}(r-r')}{\cos\frac{1}{2}(i-i')}$$

notaţiile fiind cele cunoscute.

1.1.37. Dacă se observă obiecte îndepărtate printr-o prismă, în general ele par deformate. Una dintre deformări constă în aceea că imaginea este alungită sau turtită după o direcţie perpendiculară pe muchia prismei. În ce mod trebuie ţinută prisma pentru ca o asemenea deformare să nu se observe?

1.1.38. Cum se poate construi, folosind două prisme identice de sticlă, o „lunetă" pentru observarea obiectelor îndepărtate, care să dea imagini asemenea obiectelor, cu o mărire arbitrară?

1.1.39. Se dă un corp de formă semicilindrică, din sticlă, cu indicele de refracţie $n = \sqrt{2}$. Pe suprafaţa plană a acestui corp cad raze de lumină sub un unghi de incidenţă $i = 45°$. Razele se află într-un plan perpendicular pe axa cilindrului. Din ce parte a suprafeţei cilindrului vor ieşi razele de lumină?

1.1.40. Un observator priveşte de-a lungul unui diametru orizontal al unei sfere de sticlă plină cu apă $\left(n_{apă} = \frac{4}{3}\right)$. Cum se va modifica imaginea unei particule care se deplasează în apă de-a lungul aceluiaşi diametru, către observator? Raza sferei este $R = 5$ cm.

1.1.41. O emisferă de sticlă are raza $R = 4{,}8$ cm şi indicele de refracţie $n = 1{,}5$. Suprafaţa plană care delimitează emisfera este opacă. Pe axa de simetrie a emisferei în exterior, este aşezată o sursă punctiformă de lumină. Razele luminoase trecînd prin emisferă, vor da naştere la o pată luminoasă pe suprafaţa opacă. Să se determine distanţa d dintre sursă şi suprafaţa plană, astfel ca pata să fie de dimensiune minimă. Ce rază are în acest caz pata luminoasă?

1.1.42. În faţa unei oglinzi plane verticale se află un acvariu de formă sferică din sticlă subţire, umplut cu apă $\left(n = \frac{4}{3}\right)$. Raza acvariului este R, iar distanţa dintre centrul său şi oglindă este $3R$. Un observator aflat la distanţă foarte mare în faţa acvariului, priveşte într-o direcţie care trece prin centrul acvariului şi este perpendiculară pe oglinda plană. În punctul acvariului diametral opus faţă de observator (cel mai depărtat de ochiul observatorului) se află un peştişor mic, care începe să se deplaseze vertical de-a lungul peretelui acvariului cu o viteză dată v. Cu ce viteză relativă v_r se vor îndepărta la momentul iniţial, una de alta, imaginile peştelui văzute de observator?

1.2.1. În faţa unei lentile convergente cu distanţa focală $f = 15$ cm se află un obiect aşezat perpendicular pe axa optică a lentilei la distanţa $p = 20$ cm faţă de lentilă. Să se afle: a) la ce distanţă p' faţă de lentilă se formează imaginea? b) dacă lungimea obiectului este $o = 8$ cm, ce lungime i va avea imaginea?

1.2.2. Un obiect este aşezat în faţa unei lentile convergente şi se obţine o imagine răsturnată şi de 4 ori mai mare ca obiectul. Să se afle distanţa focală a lentilei. Se dă distanţa $d = 100$ cm dintre obiect şi imagine. Cîte dioptrii are lentila folosită în problemă?

1.2.3. La ce distanţă faţă de o lentilă cu convergenţa $C = 8/3$ dioptrii trebuie aşezat un obiect cu secţiunea dreptunghiulară de 3 cm × 4 cm şi un ecran opac de 18 cm × 24 cm, astfel încît imaginea obiectului formată de lentilă să acopere exact ecranul?

1.2.4. O lentilă biconvexă cu razele de curbură egale şi indicele de refracţie n, are diametrul d şi grosimea h. Să se afle distanţa focală f a lentilei.

1.2.5. Să se arate că în cazul unei lentile subţiri cu distanţa focală f este valabilă relaţia lui Newton $x_1 x_2 = f^2$, unde x_1 este distanţa de la obiect la focarul anterior, iar x_2 distanţa de la imagine la focarul posterior.

1.2.6. O lentilă biconvexă are razele de curbură egale cu R, iar indicele de refracţie este de 3/2 ori mai mare decît cel al mediului. Ce

mărire liniară va avea lentila pentru cazul în care distanța obiect-lentilă este de trei ori mai mare decît raza de curbură?

1.2.7. Distanța dintre un bec și un ecran este $L = 50$ cm. O lentilă biconvexă cu razele de curbură ale fețelor egale cu $R = 12$ cm, formează imaginea clară a becului pe un ecran, pentru două poziții ale ecranului distanțate cu $l = 10$ cm. Să se calculeze indicele de refracție n al lentilei.

1.2.8. O bară de fier cu lungimea $l_0 = 1$ m la 0°C, are capătul A fix, iar la celălalt capăt B are fixată o lentilă convergentă cu distanța focală $f = 5$ cm. Cu cît se deplasează imaginea unui punct luminos aflat la distanța $p = 6$ cm față de lentilă, dacă bara se încălzește pînă la temperatura $t = 100$°C? Se vor considera două cazuri: a) planul principal al lentilei este perpendicular pe bară; b) bara se află în planul principal al lentilei. (Coeficientul de dilatare liniară al fierului este $\alpha = 1{,}15 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.)

1.2.9. Pe fundul unui vas cu apă $\left(n_2 = \frac{4}{3}\right)$ se află un corp. Un observator privește corpul printr-o lentilă care se află pe aceeași normală cu corpul. Știind că lentila este biconvexă avînd $R_1 = R_2 = R = 10$ cm și indicele de refracție $n_1 = 1{,}5$ să se calculeze ce nivel e trebuie să aibă apa din vas pentru ca să se formeze imagini reale ale corpului cînd lentila se află: a) la suprafața apei, în exterior; b) la suprafață, în apă. Considerînd adîncimea apei de 1 m, să se calculeze distanțele la care se formează imaginile în cele două cazuri.

1.2.10. O lentilă convergentă cu distanța focală f formează imaginea unui obiect de lungime l așezat pe axa principală. Să se studieze și să se reprezinte grafic variația mărimii y a acestei imagini în funcție de distanța p a obiectului pînă la lentilă.

1.2.11. O lentilă subțire convergentă are $C = 3/32$ dioptrii. Știind că drumul geometric al razei de lumină care trece prin centrul optic al lentilei (de la obiect și pînă la imagine) este $l = 60$ m, iar mărimea liniară a imaginii este $\gamma = 1/2$, să se determine poziția obiectului față de lentilă și mărimea sa.

1.2.12. În fața unei lentile convergente se așază un obiect cu înălțimea $o = 10$ cm, care formează pe un ecran imaginea sa de înălțime $i_1 = 40$ cm. Dacă îndepărtăm obiectul cu $d = 10$ cm față de lentilă, înălțimea imaginii se micșorează de două ori. Să se calculeze distanța focală f a lentilei.

1.2.13. Un obiect de înălțime o se depărtează cu o viteză constantă v de o lentilă convergentă cu distanța focală f plecînd de la dublul

distanței focale. Să se afle: a) distanța p_1 a imaginii față de lentilă și înălțimea sa i_1 la momentul $t = \tau$; b) viteza v' a deplasării imaginii și viteza v'' a descreșterii înălțimii sale.

1.2.14. La distanța D de o lentilă convergentă cu distanța focală $f < D$ se află un mobil care pornește spre lentilă într-o mișcare uniform accelerată cu accelerația a. Se cere: a) ecuația mișcării punctului imagine; b) expresia vitezei și accelerației punctului imagine; c) cît va fi viteza și accelerația imaginii în momentul cînd mobilul atinge lentila? Aplicație numerică: $D = 50$ m, $f = 1$ m, $a = 1$ m/s^2.

1.2.15. Un mobil se află la distanța $2f$ în stînga unei lentile convergente cu distanța focală f. Mobilul execută o mișcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $A = 2f$ și pulsația ω. Să se exprime și să se reprezinte grafic poziția y a imaginii față de lentilă în funcție de timp. Care este expresia vitezei punctului imagine?

1.2.16. Să se arate că în cazul unei lentile sferice așezată astfel încît fiecare față să vină în contact cu un mediu transparent diferit, există relația

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

unde f_1 și f_2 sînt focarele lentilei, iar n_1 și n_2 indicii de refracție ai celor două medii transparente.

1.2.17. O lentilă convergentă ($f_1 = 100$ cm) și alta divergentă ($f_2 = 90$ cm) se găsesc la $d = 50$ cm distanță. Un obiect real se află la $p = 11$ m în stînga lentilei convergente. La ce distanță p' față de lentila divergentă se va forma imaginea și care va fi caracterul ei? Se cere și construcția grafică.

1.2.18. Două lentile ($f_1 = 50$ cm, $f_2 = 75$ cm) se găsesc la distanța $d = 3$ m. În ce punct al axei comune, între cele două lentile trebuie să așezăm un obiect, pentru ca cele două imagini formate să aibă aceeași mărime?

1.2.19. Obiectivul unui aparat de proiecție este format prin asocierea a două lentile subțiri una biconvexă de crown cu indicele de refracție $n_1 = 1{,}52$, razele de curbură ale celor două fețe ale lentilei fiind egale. Cealaltă lentilă este un menisc divergent de flint cu indicele de refracție $n_2 = 1{,}68$, fața concavă avînd raza de curbură egală cu a fețelor lentilei biconvexe, iar fața convexă avînd raza de 3 ori mai mare. Să se afle: a) convergența sistemului, dacă imaginea unui obiect așezat la $p = 20$ cm față de centrul optic este reală și se for-

mează la $p' = 30$ cm față de obiectiv; b) razele de curbură ale fețelor celor două lentile; c) distanța focală a fiecărei lentile.

1.2.20. Pe axa principală a unei lentile convergente cu distanța focală $f = 50$ cm, se găsește un punct luminos P situat la distanța $p = 81{,}25$ cm față de centrul optic al lentilei. De cealaltă parte a lentilei față de punctul luminos se găsește o oglindă plană perpendiculară pe axa lentilei, astfel încît razele de lumină, după ce au străbătut lentila și s-au reflectat pe oglindă, străbat din nou lentila pentru ca să formeze imaginea finală. Se cere: a) poziția imaginii cînd oglinda este la distanța $d = 1$ m față de lentilă; b) poziția oglinzii cînd imaginea coincide cu punctul luminos.

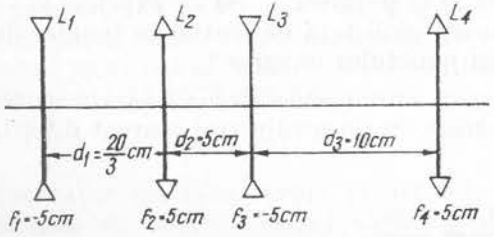


Fig. 1.2.21

1.2.21. Să se găsească imaginea unui punct situat la distanța $p = 10$ cm în stînga primei lentile din sistemul reprezentat în fig. 1.2.21.

1.2.22. Două lentile convergente L_1 și L_2 cu distanțele focale $f_1 = 20$ cm și $f_2 = 10$ cm se găsesc la distanța $l = 50$ cm. O lentilă divergentă L_3 cu $f_3 = 5$ cm se poate deplasa între L_1 și L_2. Pentru care poziție a lentilei L_3, imaginea unui obiect așezat la $p_1 = 60$ cm față de L_1 se va forma la distanța maximă față de L_2? Cît este această distanță?

1.2.23. Două lentile biconvexe alăturate au razele de curbură egale cu $r = 2$ m și indicele de refracție $n = 1{,}5$. Un obiect se află la distanța $p = 2$ m față de centrul optic. Cu cît se deplasează imaginea, dacă în spațiul dintre lentile se introduce apă cu indicele de refracție $n' = 4/3$?

1.2.24. O lentilă convergentă are indicele de refracție absolut $n = 1{,}8$. La ce distanță se va forma imaginea unui obiect cînd lentila și obiectul se află în aer, dacă atunci cînd se găsesc într-un lichid cu indicele de refracție absolut $n' = 1{,}2$, lentila are distanța focală $f_2 = 8$ cm, iar imaginea se formează cu $d = 30$ cm mai departe, decît atunci cînd mediul înconjurător este aerul?

1.2.25. Două lentile identice biconvexe cu razele de curbură $R = 20$ cm și indicele de refracție $n' = \frac{3}{2}$ sînt puse în contact coaxial,

iar intervalul dintre ele rămas liber se umple cu apă $\left(n = \frac{4}{3}\right)$. La $p = 60$ cm față de sistemul optic format se așază un obiect cu înălțimea $o = 3$ cm. Să se afle mărimea imaginii și distanța la care se formează față de sistemul optic.

1.2.26. Fie un sistem de două lentile convergente subțiri cu distanțele focale f și respectiv $3f$, aflate la distanța $d = 2f$ între ele. Să se determine poziția planelor principale și a focarelor principale ale acestui sistem.

1.2.27. Pe un banc optic se află un obiect cu înălțimea $o = 5$ cm. O lentilă biconvexă cu razele de curbură ale fețelor $R_1 = 15$ cm, $R_2 = 30$ cm, formează pe un ecran imaginea obiectului cu înălțimea $i = 20$ cm. Dacă obiectul se îndepărtează de lentilă cu $a = 5$ cm, pe ecran se formează o imagine cu înălțimea $i' = 10$ cm. Se cere: a) distanța focală f_1 a lentilei: b) indicele de refracție n al materialului din care este alcătuită lentila; c) poziția imaginii, dacă se introduce o a doua lentilă cu distanța focală $f_2 = 30$ cm la distanța $d = 110$ cm față de prima lentilă; d) dimensiunea imaginii formată de sistemul celor două lentile.

1.2.28. O lentilă cu distanța focală $f = 10$ cm în aer este confecționată dintr-o sticlă cu indicele de refracție $n = 1{,}53$. Să se calculeze distanța focală f' a lentilei cînd: a) aceasta se introduce în apă $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$; b) aceasta este introdusă în sulfură de carbon ($n_2 = 1{,}63$).

1.2.29. Cu ajutorul unei lentile convergente subțiri cu indicele de refracție $n = \frac{3}{2}$, s-a obținut o imagine reală la distanța $p' = 10$ cm față de lentilă. Cufundînd obiectul și lentila în apă, fără ca distanța dintre ele să se schimbe, imaginea s-a obținut la distanța $p'' = 60$ cm față de lentilă. Să se găsească distanța focală f a lentilei, dacă indicele de refracție al apei este $n' = \frac{4}{3}$.

1.2.30. O lentilă L e formată din două lentile subțiri convergente alipite L_1 și L_2 avînd $f_1 = 6$ cm și $f_2 = 3$ cm. La distanța $d_1 = 10$ cm față de L se găsește o altă lentilă convergentă L_3. Un fascicul de raze paralele cu axa optică principală comună, după ce trece prin întregul sistem, se întîlnește într-un punct aflat la distanța $d_2 = 5$ cm față de L_3. a) Care este convergența C a lentilei? b) Care este distanța focală f_3 a lentilei L_3? c) La ce distanță x ar trebui așezată lentila L_3 pentru ca fasciculul să iasă paralel cu axa optică principală?

1.2.31. O lentilă plan-convexă are raza $R=10$ cm și indicele de refracție $n = 1{,}5$. La distanța $p = 15$ cm în fața ei se așază un obiect cu înălțimea $i = 5$ cm. Să se determine : a) poziția, natura și mărimea imaginii ; b) obiectul rămînînd la aceeași distanță față de lentilă, așezată cu fața convexă spre el, dar avînd fața plană argintată, să se afle poziția, natura și mărimea imaginii finale în acest caz ; c) să se construiască mersul razelor de lumină în ambele cazuri.

1.2.32. Pe un banc optic, la distanța d una de alta se găsesc două lentile : prima convergentă cu distanța focală $f_1 \geqslant d$, iar a doua divergentă cu distanța focală $f_2 \leqslant f_1$. Pe lentila convergentă cade un fascicul cilindric de raze paralele, îndreptat de-a lungul axei optice principale, comună celor două lentile. a) Să se calculeze în funcție de f_1, f_2 și d, distanța D cu care se deplasează punctul de convergență al fasciculului ce iese din lentila convergentă, datorită prezenței lentilei divergente ; discuție. b) Dacă diametrul fasciculului luminos este $\varnothing_1 = 8$ cm, iar $f_1 = 16$ cm, ce valori trebuie să aibă d și f_2 pentru ca fasciculul ce iese din lentila divergentă să fie tot paralel, dar cu diametrul $\varnothing_2 = 2$ cm ?

1.2.33. O lentilă concav-convexă (menisc convergent) din sticlă ($n = 1{,}5$) are razele de curbură $R_1 = 5$ cm și $R_2 = 10$ cm. Coaxial și în dreapta se așază o lentilă convergentă cu distanța focală $f_2 = 15$ cm ; în stînga primei lentile la distanța $p = 30$ cm se așază un obiect cu înălțimea $o = 3$ cm. Să se determine poziția și mărimea imaginii cînd : a) lentilele sînt în contact ; b) lentilele se află la distanța $d = 70$ cm una față de alta.

1.2.34. O lentilă plan-concavă are raza de curbură $R = 10$ cm și indicele de refracție $n_1 = 1{,}5$. La $p_1 = 20$ cm în fața ei se află un obiect de înălțime $o = 8$ cm. a) Să se determine poziția, natura și mărimea imaginii. b) De lentila dată se alătură axial o altă lentilă identică, avînd concavitățile față în față, iar golul format se umple cu apă $\left(n = \frac{4}{3}\right)$. Să se determine poziția, natura și mărimea imaginii în acest caz. c) Să se arate grafic mersul razelor în ambele cazuri.

1.2.35. La capetele unui tub cilindric cu lungimea $l = 38$ cm se găsesc două lentile L_1 și L_2 cu distanțele focale $f_1 = 8$ cm și $f_2 = 10$ cm. Fie un obiect AB așezat la distanța a față de focarul lentilei L_1. Dacă imaginea $A'B'$ a obiectului dată de lentila L_1 se formează tot la distanța a față de focarul lentilei L_2 se cere : a) distanțele p și p' de la obiectul AB și imaginea sa pînă la lentila L_1 ; distanțele p_1 și p_1' de la $A'B'$ și imaginea sa în L_2, pînă la lentila L_2 ; b) să se calculeze raportul γ dintre lungimea obiectului AB și lungimea imaginii finale.

1.2.36. Pe sistemul de lentile reprezentat în fig. 1.2.36 cade din stînga un fascicul paralel de raze de lumină. Să se găsească punctul de convexgență al acestui fascicul după traversarea sistemului.

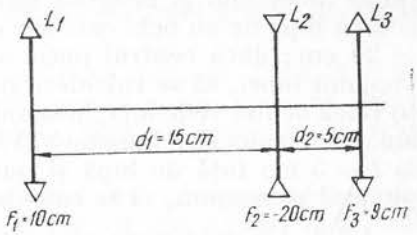


Fig. 1.2.36

1.3.1. Un om în vîrstă, cînd citește, trebuie să țină cartea la distanța $d = 40$ cm de ochi. Să se calculeze ce convergență trebuie să aibă lentila cu care se poate corija vederea în acest caz și care este distanța ei focală. Distanța minimă a vederii clare pentru un ochi normal este $d_m = 25$ cm.

1.3.2. Un ochi normal privește succesiv cîte un obiect aflat la $p_1=1$ m, $p_2 = 25$ cm și $p_3=10$ cm față de centrul său optic. Cu cît se mărește în fiecare caz convergența ochiului în urma acomodării ?

1.3.3. Un ochi miop are punctul remotum la distanța $D_m = 1$ m, iar punctul proximum la distanța $d_m = 10$ cm. Să se calculeze convergența unei lentile care trebuie plasată la distanța $l = 2$ cm față de centrul optic al ochiului pentru ca ochiul să poată vedea normal ; care este în acest caz distanța minimă a vederii clare ?

1.3.4. Un ochi normal devenit prezbit, își mărește convergența cu $\Delta C = 1$ dioptrie cînd se acomodează la maximum. a) Care sînt pe axa optică principală limitele cîmpului de vedere clară ? b) Care este convergența C_L a unei lentile care atunci cînd se află la $l = 2$cm față de centrul optic O al ochiului, permite observarea unui obiect situat la $d = 25$ cm față de O, fără acomodare ?

1.3.5. Un observator poate distinge obiectele aflate între $d_m = 45$ cm și infinit față de centrul optic al ochiului său. a) Pentru a citi un text aflat la distanța $d = 25$ cm, observatorul folosește niște ochelari plasați la $l = 1$ cm față de ochi. Între ce limite poate să varieze convergența lentilelor de la ochelari ? b) Înlăturînd ochelarii, observatorul folosește pentru citit o lupă. Ce convergență trebuie să aibă lupa pentru ca să permită în urma acomodării la infinit, citirea unei litere de înălțime $h = 2$ mm sub un unghi aparent $\alpha = 0{,}04$ radiani ?

1.3.6. Un ochi cu distanța minimă a vederii clare $d_m = 10$ cm, vede printr-o lupă un obiect de înălțime $o = 1$ mm sub un unghi $\alpha = 0{,}05$ radiani. a) Să se calculeze puterea și gosismentul lupei ; b) Să se calculeze distanța focală a lupei, dacă ochiul este normal, iar observarea se face fără acomodare.

1.3.7. Cu ajutorul unei lentile se formează pe un ecran imaginea unui obiect. Distanța dintre obiect și ecran este $d = 8$ cm, iar înălțimea obiectului și imaginii sînt egale. a) Această lentilă este folosită ca lupă de un ochi care are distanța minimă a vederii clare $d_m = 20$ cm; dacă centrul optic al ochiului se află în planul focal al imaginii lupei, să se calculeze puterea P și grosismentul G al lupei. b) Dacă ochiul vede imaginea unui obiect sub un unghi $\alpha = 0{,}05$ radiani, să se calculeze lungimea AB a obiectului. c) Dacă ochiul se află la $l = 5$ cm față de lupă și punerea la punct se efectuează pentru punctul proximum, să se calculeze puterea lupei.

1.3.8. Un ochi vede clar numai obiectele aflate între distanțele $d_m = 6$ cm și $D_m = 13{,}5$ cm față de centrul său optic. a) Care este defectul acestui ochi? Pentru a corecta vederea, se folosește o lentilă L_1 aflată la $l = 1$ cm față de ochi. Care este natura și distanța focală f a acestei lentile, dacă, privind prin ea, ochiul vede fără acomodare obiectele aflate la infinit? b) Cu vîrsta posibilitatea de acomodare a ochiului scade și limitele vederii clare devin $d'_m = 12$ cm, respectiv $D'_m = 13{,}5$ cm. Care sînt în acest caz limitele vederii clare a ochiului care privește prin L_1?

1.3.9. Un miop devenit prezbit are distanța maximă a vederii clare $D_m = 1$ m, iar distanța minimă a vederii clare $d_m = 40$ cm a) Ce convergență C_1 trebuie să aibă o lentilă L_1, prin care ochiul să poată privi fără acomodare obiectele aflate la infinit? b) Ce convergență C_2 trebuie să aibă o lentilă L_2, astfel încît distanța minimă a vederii clare să fie $d_m = 20$ cm, atunci cînd ochiul privește prin ansamblul lentilelor L_1 și L_2 alipite? (Se neglijează distanța de la L_1 la ochi.)

1.3.10. Centrul optic al unui ochi normal se află pe axa principală a unei lupe cu grosismentul comercial $G_c = 2{,}5$, la distanța $l = 5$ cm față de centrul optic al lupei. Un obiect cu înălțimea $AB = 1$ mm, perpendicular pe axă, se află la $d = 5$ cm față de focarul lupei (mai aproape de lupă decît focarul). a) Să se determine diametrul aparent β al imaginii observate de ochi și puterea lupei; să se compare această putere cu cea pe care ar avea-o lupa dacă obiectul s-ar afla în focar. b) Să se calculeze grosismentul G dacă distanța minimă a vederii clare este $d_m = 15$ cm. c) Care ar fi grosismentul G' dacă ochiul ar fi miop și ar putea vedea numai obiectele aflate între distanța $d'_m = 7{,}5$ cm și $D'_m = 1{,}5$ cm față de centrul său optic? Care ar fi atunci rolul lupei?

1.3.11. Pe baza examenului oftalmologic s-a stabilit că la un hipermetrop, punctul remotum se găsește înapoia retinei la distanța $p = 0{,}4$ m. a) Să se determine divergența ochiului și punctul proximum. b) Corijarea se face cu o lentilă convergentă din crown ușor

de Paris ($n = 1{,}5$). Care este raza de curbură a meniscului convex, dacă meniscul concav este standardizat la $C = 3$ dioptrii, iar diametrul lentilei este $d = 0{,}04$ m? c) Cu cît este mai groasă lentila la centru decît la margine?

1.3.12. Puterea separatoare a ochiului normal fiind $\beta = 2'$, care este distanța minimă între două puncte vecine pe care ochiul le poate separa, observîndu-le printr-o lupă cu convergența $C = 50$ dioptrii? Discuție.

1.3.13. Un obiect trebuie fotografiat cu un aparat fotografic al cărui obiectiv are distanța focală $f = 12$ cm. Obiectul se află la $p = 15$ cm depărtare de obiectiv, iar distanța de la obiectiv la placa fotografică este $p' = 20$ cm. Ce lentilă adițională trebuie folosită pentru ca imaginea să apară clară în acest caz?

1.3.14. Geamul mat al unui aparat fotografic este așezat în așa fel încît apare bine pusă la punct imaginea unui obiect ce se află la o distanță $p_1 = 5$ m. Pînă la ce diametru d poate fi diafragmat obiectivul (cu distanța focală $f = 20$ cm) pentru a se păstra claritatea și în cazul obiectelor aflate cu $a = 0{,}5$ m mai aproape de obiectivul fotografiat? Neclaritatea se consideră neglijabilă, dacă îngroșarea detaliilor nu depășește $l = 0{,}1$ mm.

1.3.15. Prin definiție, puterea unui microscop este raportul dintre diametrul aparent β al imaginii finale și lungimea l a obiectului. Folosind această definiție, să se obțină relațiile (32) și (33).

1.3.16. Obiectivul și ocularul unei lunete afocale au convergența $C_1 = 2$ dioptrii, respectiv $C_2 = 50$ dioptrii. a) Să se determine grosismentul lunetei. b) Dacă distanța unghiulară dintre două stele este $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ radiani, să se determine distanța unghiulară aparentă dintre cele două stele observate prin lunetă.

1.3.17. Puterea intrinsecă a unui microscop este $P_i = 1000$ dioptrii. Să se determine înălțimea h a unui obiect care la o distanță $d_m = 25$ cm este văzut cu ochiul liber sub un unghi egal cu diametrul aparent al imaginii pe care microscopul o formează de la un obiect de înălțime $o = 10^{-6}$ m. (Punerea la punct se consideră că este realizată pentru un ochi normal aflat în repaus.)

1.3.18. Obiectivul unui microscop are convergența $C = 100$ dioptrii, iar lungimea optică a microscopului este $\Delta = 16$ cm. a) Să se calculeze mărirea obiectivului în cazul punerii la punct pentru infinit. b) Care trebuie să fie distanța focală a ocularului, pentru ca grosismentul comercial să fie $G_c = 160$?

1.3.19. Obiectivul și ocularul unui microscop au distanțele focale $f_{ob} = 1{,}6$ cm, respectiv $f_{oc} = 2{,}5$ cm; distanța dintre centrele lor

optice este $d = 22{,}1$ cm; punerea la punct fiind realizată pentru infinit, să se calculeze; a) distanța p de la obiect pînă la obiectiv; b) mărirea obiectivului; c) grosismentul, și grosismentul comercial pentru un ochi care are distanța minimă a vederii clare $d_m = 0{,}25$ m.

1.3.20. Un microscop este constituit dintr-un obiectiv O și un ocular O' de distanță focală $f_{oc} = 30$ mm și limitat de o diafragmă cu diametrul $d = 4$ mm aplicată pe ocular. Distanța dintre O' și focarul-imagine al obiectivului este $l = 210$ mm. a) Dacă puterea intrinsecă a microscopului este $P_i = 1200$ dioptrii, să se calculeze distanța focală a obiectivului. b) La ce distanță față de O trebuie plasat un obiect, pentru ca acesta să poată fi văzut prin microscop, de un observator miop care are limitele vederii clare cuprinse între $d_m = 18$ cm și $D_m = 40$ cm? c) Ce dimensiune maximă poate avea obiectul, pentru a putea fi văzut integral la microscop de acest observator? d) La ce distanță s față de obiectiv trebuie să situăm obiectul, pentru ca imaginea să se formeze la distanța $d' = 1$ m față de ocular? Care este mărirea γ obținută în acest caz? (În toate situațiile, ochiul este plasat în focarul-imagine al ocularului.)

1.3.21. Un microscop este utilizat succesiv de un observator cu vederea normală (care vizează la infinit) și de un observator miop. Se dau: mărimea obiectului $AB = 0{,}01$ mm; distanța focală a obiectivului $f_{ob} = 5$ mm; distanța focală a ocularului $f_{oc} = 2$ cm; lungimea optică $\Delta = F_1' F_2 = 18$ cm. a) Să se traseze grafic mersul unui fascicul de raze prin microscop. Să se determine puterea P a microscopului pentru un ochi normal. b) Care este unghiul β sub care un ochi normal vede imaginea definitivă $A'B'$ la infinit? c) Observatorul miop privește cu ochiul liber prin microscop, astfel încît centrul optic al ochiului său se află la distanța $l = 1$ cm față de centrul optic al ocularului. Pentru a vedea clar, observatorul trebuie să refacă punerea la punct, astfel încît să aducă imaginea finală $A'B'$ la distanța maximă a vederii sale clare $D = 11$ cm. Care este sensul și mărimea d a deplasării microscopului pentru această punere la punct? d) Care este mărimea imaginii $A'B'$ și unghiul α'' sub care miopul vede această imagine?

1.3.22. O lunetă cu distanța focală a obiectivului $f = 50$ cm este pusă la punct pentru infinit. Cu ce distanță Δl trebuie deplasat ocularul lunetei pentru a putea observa clar obiectele aflate la distanța $p_1 = 50$ m?

1.3.23. O lunetă compusă dintr-un obiectiv cu distanța focală $f' = 50$ cm și un ocular cu distanța focală $f'' = 2$ cm este ajustată pentru infinit. Să se calculeze unghiul α sub care se vede discul lunii prin lunetă, știind că privind cu ochiul liber, acesta apare sub unghiul

$\beta = 30'$. Cu ce distanță Δl trebuie deplasat ocularul lunetei pentru a vedea clar obiectele la o distanță $d = 50$ m?

1.3.24. Distanța focală a obiectivului unei lunete telescopice este $f_1 = 60$ cm, iar a ocularului este $f_2 = 4$ cm. Indicele de refracție al sticlei obiectivului și ocularului este $n = \frac{3}{2}$. Luneta se cufundă apoi complet în apă. Cu ce obiectiv, confecționat din aceeași sticlă trebuie înlocuit obiectivul lunetei, pentru a se putea observa cu ajutorul ei obiecte îndepărtate aflate în apă? Cît va fi în acest caz mărirea lunetei, dacă indicele de refracție al apei este $n' = \frac{4}{3}$?

1.3.25. Obiectivul unei lunete astronomice are distanța focală $f_{ob} = 1{,}2$ m. a) Ce convergență trebuie să aibă ocularul, astfel încît grosismentul intrinsec al lunetei să fie $G = 60$? b) Luneta fiind afocală, în ce sens și cu ce distanță d trebuie deplasat ocularul în raport cu obiectivul, pentru a obține pe o placă fotografică o imagine de 5 ori mai mare decît cea care s-ar obține numai cu ajutorul obiectivului? La ce distanță l față de ocular trebuie plasată placa fotografică? c) Imaginile a două stele se percep distinct atunci cînd distanța dintre ele, măsurată pe placa fotografică este mai mare decît $d_m = 3 \cdot 10^{-4}$ cm. Care este cea mai mică distanță unghiulară dintre două stele pentru ca imaginile lor să poată fi separate pe placa fotografică, în condițiile de la punctul b)? Care ar fi această distanță unghiulară dacă placa fotografică s-ar afla în planul focal al obiectivului?

1.3.26. Un obiectiv cu convergența $C_{ob} = 4$ dioptrii, este asociat cu o lentilă divergentă cu convergența $C_{oc} = -10$ dioptrii, care joacă rol de ocular (lunetă Gallilei). a) Să se arate grafic, că dacă focarul-obiect F_2 al ocularului divergent este situat între obiectiv și focarul-imagine F_1' al obiectivului la mică distanță față de F_1', ocularul dă o imagine finală virtuală și dreaptă în raport cu obiectul considerat la infinit. b) Cum trebuie să procedăm pentru a realiza o lunetă Galilei afocală? Care este în acest caz distanța dintre cele două lentile? c) Să se refacă construcția imaginilor succesive în cazul lunetei afocale; să se arate că în acest caz grosismentul $G = \frac{\beta}{\alpha}$ este egal cu raportul distanțelor focale ale obiectivului și ocularului. d) Să se determine unghiul β sub care un observator cu vederea normală vede prin lunetă un turn înalt de $h = 50$ m și aflat la distanța $D = 2$ km. e) Un miop, observă același turn prin lunetă, cu ochiul liber; în ce sens și cu cît trebuie să deplaseze ocularul în raport cu obiectivul, pentru ca să observe imaginea finală în punctul său remotum, aflat la distanța $D_m = 1$ m față de ocular?

2. OPTICĂ ONDULATORIE

BREVIAR

2.1. **Noțiuni** (recapitulative) **privind undele electromagnetice.**

Forma de propagare a unui cîmp electromagnetic variind periodic (în timp) se numește *undă electromagnetică*. În cazul propagării în medii izotrope (și omogene) vectorii cîmp electric $\vec{E}$ și inducție magnetică $\vec{B}$ oscilează în direcții perpendiculare pe direcția propagării undei electromagnetice.

Undele electromagnetice pot fi clasificate după :

1) *direcțiile* (relative) *după care se produc oscilațiile cîmpului electric al undei electromagnetice, în diferite puncte ale spațiului*, deosebind (printre altele) ;

a) *undele liniar* (plan) *polarizate*, în cazul cînd toate direcțiile de oscilație ale cîmpului electric al undei sînt paralele cu un plan conținînd direcția de propagare a undei (planul respectiv fiind denumit și *plan de oscilație*) ;

b) *unde parțial-polarizate* și *unde nepolarizate*, dacă probabilitatea ca direcția de oscilație a vectorului cîmp electric să fie paralelă cu un plan arbitrar conținînd direcția de propagare a undei, variază (fără ca unda să fie liniar-polarizată) sau rămîne aceeași la rotația planului în jurul direcției de propagare ;

2) *natura spațiului în care se produce propagarea undei electromagnetice*, putînd deosebi (printre altele) :

a) *unde progresive* (fig. 1), *respectiv unde staționare* (fig. 2), după cum spațiul în care se produce propagarea este „deschis" (fără obstacole reflectătoare), respectiv limitat de suprafețe avînd valori ridicate (apropiate de unitate) ale coeficienților de reflexie ai undei electromagnetice ;

b) *unde neamortizate*, respectiv *unde amortizate*, după cum propagarea undei se produce în medii conservative (în care unda nu pierde energie), respectiv în medii disipative ;

3) *tipul suprafeței de undă în regiunea de observație a undei electromagnetice*, deosebind (printre altele) :

a) *unde plane* respectiv *unde sferice*, după cum — în regiunea de observație — suprafața de undă este (practic) plană sau sferică.

Pentru simplitate, vom considera în continuare cazul undelor plane, liniar-polarizate, care se propagă în medii omogene și izotrope. În acest caz, inducția magnetică $\vec{B}$ corespunzătoare undei electromagnetice oscilează într-un plan (conținînd direcția de propagare a undei) — denumit plan de polarizare — perpendicular pe

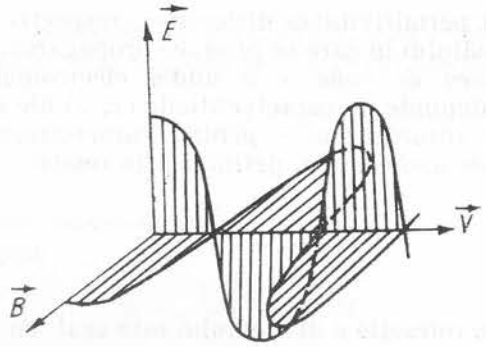


Fig. 1

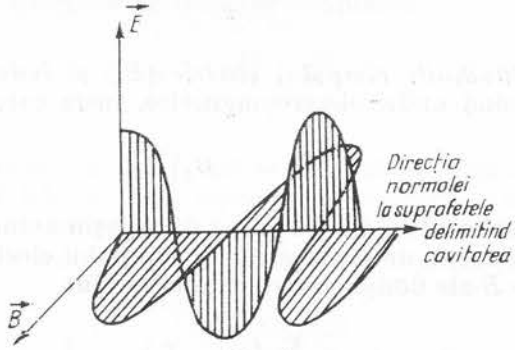


Fig. 2

planul de oscilație ; în cazul undelor progresive, oscilațiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ au, la un același moment și într-un același loc din spațiu, aceeași fază (fig. 1), pe cînd în cazul undelor staționare (fig. 2) există defazajul de $\frac{\pi}{2}$ radiani între oscilațiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$.

Principalele mărimi fizice caracterizînd o undă electromagnetică sînt :

1) *Viteza de propagare* (a fazei), care în cazul mediilor omogene şi izotrope este dată de expresia

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} \tag{1}$$

unde ε şi μ sînt permitivitatea dielectrică, respectiv permeabilitatea magnetică a mediului în care se produce propagarea.

2) *Lungimea de undă* λ a undei electromagnetice într-un mediu anumit depinde de caracteristicile (ε, μ) ale mediului, se utilizează practic întotdeauna — pentru caracterizarea undei —mărimea *lungime de undă în vid*, definită prin relaţia

$$\lambda_0 = c\ T = \frac{\lambda}{n} \tag{2}$$

unde indicele de refracţie n al mediului este egal cu

$$n = \frac{c}{v}.$$

3) *Amplitudinile cîmpului electric* (E_0) *şi inducţiei magnetice* (B_0) corespunzînd undei electromagnetice, între care există relaţia

$$E_0 = v\ B_0; \tag{3},$$

valorile la momentul t, într-un punct din spaţiu avînd coordonata x în raport cu direcţia de propagare, ale cîmpului electric E şi inducţiei magnetice B ale undei electromagnetice sînt

$$E = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$$

$$B = v\,E = B_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]^{*} \tag{4}$$

* În cazul unui mediu conservativ, valorile amplitudinilor E_0 şi B_0 sînt constante în timp (într-un loc anumit), iar pentru o undă plană au aceeaşi valoare în toate punctele regiunii de observaţie.

unde φ este faza oscilaţiilor undei electromagnetice la momentul $t = 0$, în originea axei Ox.

4) *Densitatea volumică instantanee a energiei undei electromagnetice*, definită în fiecare punct al spaţiului prin relaţia.

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} \tag{5}$$

unde ΔW este energia undei electromagnetice în elementul de volum ΔV din jurul punctului considerat ; în cazul mediilor omogene şi izotrope :

$$w = \varepsilon\,E^2 = \frac{B^2}{\mu}. \tag{6}$$

5) *Densitatea volumică medie* (în timp) *a energiei electromagnetice*, definită prin

$$\widetilde{w} = \frac{1}{T}\int_0 w\,(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

[T este perioada oscilaţiilor cîmpului electromagnetic] are — în cazul mediilor omogene şi izotrope—expresia

$$\widetilde{w} = \frac{\varepsilon\,E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\,\mu} \tag{8}$$

6) *Densitatea fluxului de energie electromagnetică* (vectorul Poynting) definită ca fiind mărimea vectorială avînd direcţia şi sensul vitezei de propagare a undei electromagnetice şi mărimea

$$S = \lim_{\substack{\Delta A_n \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta W}{\Delta A_n \cdot \Delta t}. \tag{9}$$

unde ΔW este energia electromagnetică transferată în intervalul $(t,\ t + \Delta t)$ prin elementul de arie ΔA_n aşezat normal pe direcţia undei electromagnetice ; în cazul mediilor omogene şi izotrope

$$\vec{S} = w \cdot \vec{v} = \frac{B^2}{\mu}\vec{v} = \frac{E^2}{\zeta}\vec{1}_v = \vec{E} \times \vec{H} \tag{10}$$

în care $\vec{1}_v$ este vectorul unitar corespunzînd direcției (și sensului) vitezei de propagare a undei electromagnetice, ζ este impedanța mediului în care se produce propagarea

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{11}$$

iar H este intensitatea cîmpului magnetic al undei

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}. \tag{12}$$

În cazul unui fascicul electromagnetic format din N unde electromagnetice liniar-polarizate, care se propagă după o aceeași direcție este importantă mărimea *grad de polarizare* * (P_π) *al fasciculului în raport cu un plan* Π *conținînd direcția de propagare a fasciculului*

$$P_\pi = \frac{\sum_{k=1}^{N} E_{0k\parallel}^2 - \sum_{k=1}^{N} E_{0k\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{0k\parallel}^2 + \sum_{k=1}^{N} E_{0k\perp}^2} \tag{13}$$

unde $E_{0k\parallel}$ și $E_{0k\perp}$ sînt componentele amplitudinii ($\vec{E}_{ok}$) undei electromagnetice liniar polarizate de indice „k", paralelă, respectiv perpendiculară pe planul Π.

2.2. Noțiuni de fotometrie

Principalele mărimi fotometrice (cu caracter fizico-fiziologic) sînt:

1) *energia luminoasă* $\mathscr{W}$ (unitate: lumen·secundă; lm·s) definită *ca energia radiațiilor electromagnetice*, din domeniul vizibil al spectrului, emisă de o sursă (sau recepționată de un observator) *evaluată prin senzația luminoasă produsă*;

2) *fluxul luminos* Φ (unitate: lumen; lm) definit prin relația

$$\Phi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathscr{W}}{\Delta t} \tag{14}$$

* Unii autori utilizează gradul de polarizare specific fasciculului (P_f), definit ca fiind valoarea maximă a gradului de polarizare P_π; evident $0 \leqslant P_f \leqslant 1$, în timp ce $-1 \leqslant P_\pi \leqslant 1$.

unde $\Delta \mathscr{W}$ este energia luminoasă emisă de o sursă luminoasă (sau recepționată de un observator) într-un interval de timp de durată Δt;

3) *emitanța* (radianța) *luminoasă* $\mathscr{R}$ (unitate: lumen·m^{-2}; lm·m^{-2}) a suprafeței unei surse

$$\mathscr{R} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta A} \tag{15}$$

unde $\Delta\Phi$ este fluxul luminos emis de un element, de arie ΔA, al suprafeței sursei luminoase;

4) *intensitatea luminoasă* $\mathscr{I}$ (unitate: candela; cd) definită prin relația

$$\mathscr{I} = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta \Omega} \tag{16}$$

unde $\Delta\Phi$ este fluxul luminos emis în unghiul solid elementar $\Delta\Omega$;

5) *iluminarea* $\mathscr{E}$ (unitate: lumen·m^{-2}; lm·m^{-2}) a unei suprafețe, definită prin relația

$$\mathscr{E} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta A} \tag{17}$$

unde $\Delta\Phi$ este fluxul luminos incident pe o porțiune, de arie ΔA, a suprafeței;

6) *luminanța* (strălucirea) $\mathscr{L}$ (unitate: nit; nt) unei surse, în direcția formînd unghiul θ cu normala la suprafața sursei (de mici dimensiuni)

$$\mathscr{L} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathscr{I}}{\Delta T \cdot \cos\theta} = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\Omega \to 0}} \frac{\Delta \Phi}{\Delta A \cdot \Delta\Omega \cos\theta} \tag{18}$$

unde $\Delta\Phi$ este fluxul luminos emis de elementul de arie ΔA al suprafeței sursei, în interiorul unghiului solid elementar $\Delta\Omega$ din jurul direcției respective, iar $\Delta\mathscr{I}$ este intensitatea luminoasă emisă, în direcția θ, de elementul ΔA al sursei;

7) *lungimea de undă* λ_m *corespunzînd maximului vizibilității relative* este acea lungime de undă pentru care, în regimul de observație respectiv, raportul

$$\frac{\Delta\varphi(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)}{\Delta\Phi(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)} = f(\lambda)$$

este maxim, $\Delta\varphi(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ și $\Delta\Phi(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ fiind contribuțiile radiațiilor (unei surse) din intervalul spectral $(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ la valoarea fluxului luminos, respectiv energetic, al sursei (λ_m variază cu regimul de observație: $\lambda_m = 0{,}555$ μm în regim diurn, $\lambda_m = 0{,}51$ μm în regim crepuscular etc.)

8) *fluxul (puterea) efectiv* (ă) Φ^{ef} (unitate: wattul efectiv; Wl), corespunzînd, într-un anumit regim de observație, radiației electromagnetice compuse emise de o sursă, este egal cu fluxul energetic Φ corespunzînd radiațiilor monocromatice $\lambda = \lambda_m$ care, fiind emise de o sursă așezată în același loc, ar produce un efect fiziologic identic (o aceeași valoare a intensității luminoase) ca și cel determinat de radiația compusă,

9) *densitatea spectrală* Φ^{ef}_λ *a fluxului efectiv*, definită prin relația

$$\Phi^{ef}_\lambda = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\Delta\Phi^{ef}(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \tag{19}$$

unde $\Delta\Phi^{ef}(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ este contribuția la fluxul efectiv a radiațiilor electromagnetice ale căror lungimi de undă sînt cuprinse în intervalul spectral îngust $(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$,

10) *efectivitatea luminoasă* (vizibilitatea) *relativă* V_λ, definită prin relația

$$V_\lambda = \frac{\Phi^{ef}_\lambda}{\Phi_\lambda} = f(\lambda, \text{regim de observație}) \tag{20}$$

unde Φ^{ef}_λ și Φ_λ sînt densitățile spectrale ale fluxului efectiv, respectiv energetic (pentru variația V_λ cu lungimea de undă, fig. 3),

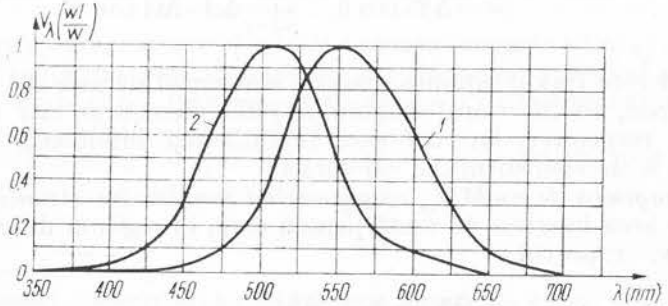


Fig. 3

11) *echivalentul fotometric al fluxului efectiv* K definit prin relația

$$K = \frac{\Delta\Phi\ (\Delta A, \Delta\Omega)}{\Delta\Phi^{ef}\ (\Delta A, \Delta\Omega)}, \tag{21}$$

unde $\Delta\Phi$ și $\Delta\Phi^{ef}$ sînt fluxul luminos, respectiv fluxul efectiv emis de un element de arie ΔA al unei surse, în interiorul unui unghi solid de mărime $\Delta\Omega$; echivalentul fotometric al fluxului efectiv depinde întrucîtva (slab) de regimul de observație, precum și de observator,

12) *eficacitatea luminoasă* η (unitate: lumen/W; lm/W) a unei surse, definită prin relația

$$\eta = \frac{\Phi}{P} \tag{22}$$

unde Φ este fluxul luminos emis de sursă, iar P este puterea consumată de aceasta.

Mărimile fotometrice (cu caracter fizico-fiziologic) pot fi exprimate prin mărimile fizice corespunzătoare, după cum urmează:

1) *energia luminoasă* $\mathscr{W}$ prin relația

$$\mathscr{W} = K\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} V_\lambda \cdot W_\lambda \, d\lambda, \tag{23}$$

unde W_λ este densitatea spectrală* a energiei radiațiilor electromagnetice, iar λ_{min}, λ_{max} sînt valorile lungimilor de undă corespunzînd limitelor spectrului vizibil;

2) *fluxul luminos* Φ și *emitanța* (radianța) *luminoasă* $\mathscr{R}$ prin relații asemănătoare (cu precedenta)

$$\Phi = K\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} V_\lambda \cdot \Phi_\lambda \, d\lambda, \quad \mathscr{R} = K\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} V_\lambda \cdot R_\lambda \, d\lambda. \tag{24}$$

R_λ fiind densitatea spectrală a emitanței (radianței) energetice**,

* Densitatea spectrală $\mathscr{M}_\lambda$ (după lungimile de undă) a oricărei mărimi fizice $\mathscr{M}$ fiind definită prin relația

$$\mathscr{M}_\lambda = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\Delta\mathscr{M}(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \tag{19'}$$

$\Delta\mathscr{M}(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ fiind contribuția la valoarea mărimii $\mathscr{M}$ a radiațiilor din intervalul spectral $\lambda, \lambda+\Delta\lambda$.

** În cazul unei surse care poate fi considerată drept *corp negru* (coeficientul de absorbție egal cu unitatea), densitatea spectrală a emitanței energetice este dată de legea lui Planck

$$R_\lambda = \frac{2\pi h\cdot c^2}{\lambda^5}\cdot\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda T}\right)-1\right]^{-1}. \tag{24'}$$

3) *iluminarea* $\mathcal{E}$ unei suprafețe de către un fascicul electromagnetic incident sub unghiul i (față de normala la suprafață)

$$\mathcal{E} = K \cdot \cos i \cdot \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} V_\lambda \cdot S_\lambda \cdot d\lambda \tag{25}$$

unde S_λ este densitatea spectrală (în raport cu lungimile de undă) a densității fluxului de energie corespunzînd undei electromagnetice;

4) *luminanța* (strălucirea) ($\mathscr{L}$) *fizico-fiziologică*, în baza relației.

$$\mathscr{L} = K \cdot \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} V_\lambda \cdot B_\lambda \cdot d\lambda \tag{26}$$

unde B_λ este densitatea spectrală a strălucirii energetice.

Între mărimile fotometrice cu caracter fizico-fiziologic există următoarele relații mai importante

1) $$\mathscr{R} = \pi \cdot \mathscr{L} \tag{27}$$

în cazurile cînd luminanța sursei este aceeași în toate direcțiile (radiație izotropă);

2) $$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{I}}{r^2} \cdot \cos i \text{ (numită și „legea iluminării")} \tag{28}$$

$\mathcal{E}$ fiind iluminarea unei suprafețe așezate la distanța r de o sursă punctiformă de intensitate (în direcția suprafeței) $\mathcal{I}$, iar i fiind unghiul de incidență al radiațiilor electromagnetice emise de sursa luminoasă pe suprafața considerată.

2.3. **Interferența undelor electromagnetice** (în particular, a luminii)

Fenomenul de suprapunere—într-o anumită regiune a spațiului—a două sau mai multor unde electromagnetice se numește *interferență a undelor electromagnetice.*

Interferența undelor electromagnetice poate prezenta diferite aspecte în funcție de *gradul de coerență* (γ) al undelor care se suprapun, mărime definită în funcție de valoarea maximă $\widetilde{w}_{max}$ [în cazul luminii $\widetilde{\mathcal{E}}_{max}$] — în regiunea restrînsă de referință— a densității volumice a energiei electromagnetice (sau iluminării, în cazul interferenței undelor luminoase) mediate peste timp (pe durata τ a intervalului de observație)

$$\gamma = \frac{\widetilde{w}_{max} - \sum_{i=1}^{N} \widetilde{w}_i}{2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \sqrt{\widetilde{w}_i \cdot \widetilde{w}_j}} \tag{29}$$

$$\left[\text{respectiv, în cazul undelor luminoase: } \gamma = \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_{max} - \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathcal{E}}_i}{2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_i \cdot \widetilde{\mathcal{E}}_j}}\right],$$

unde $\widetilde{w}_i$, $\widetilde{w}_j$ (respectiv $\widetilde{\mathcal{E}}_i$, $\widetilde{\mathcal{E}}_j$) sînt valorile mediate peste durata a intervalului de observație:

$$\widetilde{w}_i = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^\tau w_i(t)\, dt, \quad \left[\text{respectiv } \widetilde{\mathcal{E}}_i = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^\tau \mathcal{E}_i(t)\, dt\right] \tag{7'}$$

ale densităților volumice de energie (respectiv iluminărilor) determinate—în respectiva zonă a spațiului—de acțiunea separată a undei electromagnetice i, respectiv j ($i, j = 1, 2, \ldots, N$).

Valorile înalte ale gradului de coerență sînt caracteristice undelor electromagnetice satisfăcînd *condițiilor* (*de coerență*):

1) *lungimile de undă ale fasciculelor electromagnetice* (care se suprapun) să fie *practic egale*;

2) *există* (suficient de multe) *intervale temporale* (în durata de observație) *în cursul cărora oscilațiile cîmpurilor electrice* (deci și magnetice) ale undelor care se suprapun, *sînt simultan nenule* (cu alte cuvinte, există și o suprapunere *în timp* a oscilațiilor respectivelor unde);

3) *diferențele fazelor oscilațiilor* vectorilor $\vec{E}_j$ (sau $\vec{B}_j$) corespunzînd undelor electromagnetice care se suprapun, sînt *practic constante* în intervalul de observație;

4) *unghiurile dintre planele de vibrație* (sau între planele de polarizație) ale unor componente liniar-polarizate ale unor unde diferite (care se suprapun) să rămînă *practic constante* (și nu toate egale cu 90°) în durata intervalului de observație.

Practic, condițiile de coerență necesare obținerii interferenței staționare pot fi realizate :

a) *utilizînd radiațiile* (de înaltă coerență) *laser* ;

b) *utilizînd fascicule electromagnetice provenind dintr-o aceeași zonă restrînsă a unei surse* electromagnetice (luminoase) uzuale, *cu condiția ca distanțele străbătute de diferitele fascicule* între sursă și locul de observare a interferenței *să nu difere cu mai mult de lungimea unui tren de undă.* *

Principalele *metode de obținere a două fascicule distincte* provenind *de la o aceeași sursă* (de mici dimensiuni) sînt :

1) *metoda diafragmării* (obturării) *radiației emise de sursă*, exemplu tipic interferometrul Young (fig. 4) [in acest caz, deschiderile fantelor F_1, F_2 sînt surse aparente (virtuale)] ;

2) *metoda dedublării prin reflexie pe oglinzi*, exemplu tipic dispozitivul cu oglinzi al lui Fresnel (fig. 5) ;

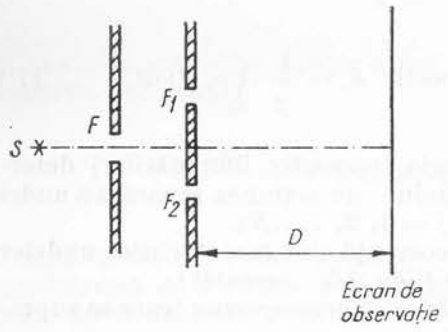


Fig. 4

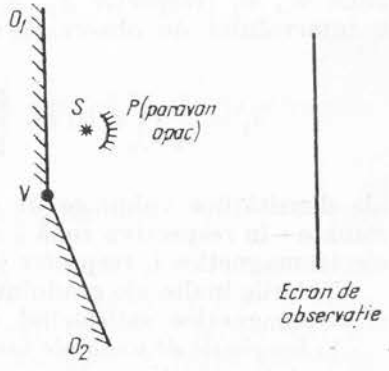


Fig. 5

3) *metoda dedublării prin reflexie și transmisie*, exemplu tipic interferometrul Michelsohn (fig. 6) ;

4) *metoda dedublării prin transmisie prin prisme*, exemplu tipic dispozitivul cu prismă Fresnel (fig. 7) ;

* Lungimea (l_{tr}) a unui tren de undă este egală cu produsul dintre viteza luminii în mediul respectiv și durata unui act elementar de emisie (emisia unui foton), uzual de ordinul $10^{-8}...10^{-9}$ s : $l_{tr} = v\, t_{act\ emisie}$.

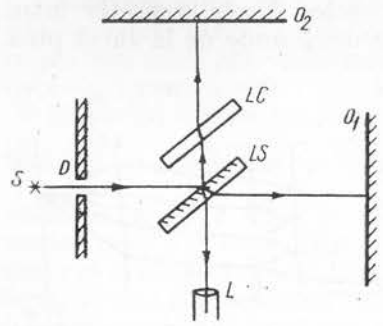


Fig. 6

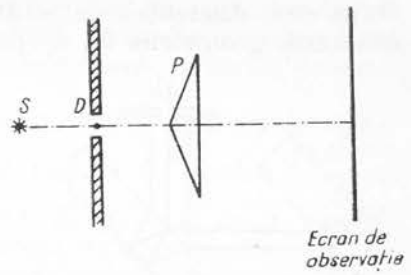


Fig. 7

5) *metoda dedublării prin transmisie prin lentile* (cu centre optice diferite), exemplu tipic dispozitivul cu bilentilă Billet (fig. 8).

Principala metodă de obținere a mai multor fascicule distincte provenind *de la o aceeași sursă* (de mici dimensiuni) este cea utilizînd *reflexiile multiple într-o lamă cu fețe* (transparente) *plan-paralele* (fig. 9).

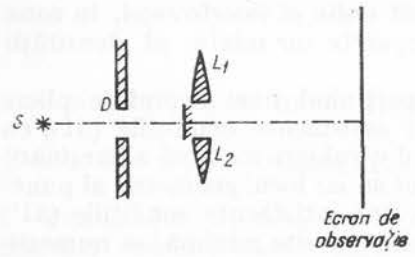


Fig. 8

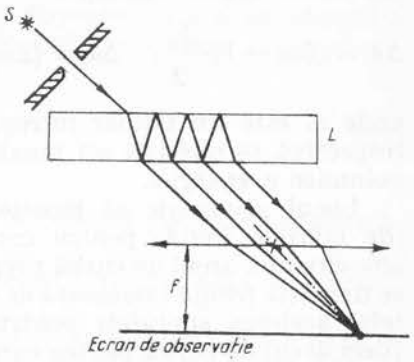


Fig. 9

Aparatele de măsură sau control, bazate pe fenomenul de interferență a luminii se numesc *interferometre* ; în afara interferometrului Michelson (fig. 6) și lamei Lummer-Gehrcke (fig. 9), mai sînt de importanță interferometrul cu două fascicule de tip Jamin (fig. 10) și interferometrul cu mai multe fascicule de tip Fabry-Pérot (fig. 11), în care piesele principale sînt lamele transparente L_1, L_2 cu fețe plan-paralele în primul caz, respectiv cu fețe neparalele.

După cum diferențele între drumurile optice δ_1, δ_2 respectiv între drumurile geometrice d_1, d_2 (parcurse de două unde de la sursă pînă

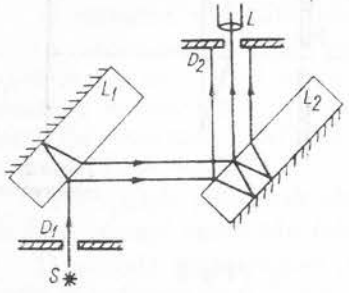


Fig. 10

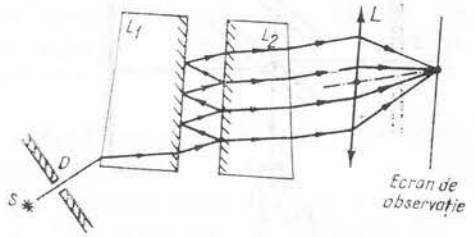


Fig. 11

la zona interferenței observate) sau diferența fazelor φ_1, φ_2 ale oscilațiilor celor două unde, satisfac uneia din următoarele condiții echivalente

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = m\lambda_0, \quad \Delta d = d_1 - d_2 = m\lambda, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2m\pi \tag{31}$$

sau uneia dintre condițiile

$$\Delta\delta = (2m-1)\cdot\frac{\lambda_0}{2}, \quad \Delta d = (2m-1)\cdot\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\varphi = (2m-1)\,\pi \tag{31'}$$

unde m este un număr întreg, numit *ordin al interferenței*, în zona respectivă se observă un maxim, respectiv un minim al densității volumice a energiei.

Locul geometric al punctelor aparținînd unei suprafețe plane (de mărime finită) pentru care sînt satisfăcute condițiile (31), cu alte cuvinte, arcul de curbă prezentînd o valoare maximă a iluminării se numește *franjă luminoasă de ordinul m*, iar locul geometric al punctelor aceleiași suprafețe pentru care sînt satisfăcute condițiile (31') [deci arcul de curbă pentru care iluminarea este minimă] se numește *franjă întunecată de ordinul m*.

Distanța între două franje luminoase (sau întunecate) consecutive, măsurată pe ecranul de observație, se numește *interfranjă*.

Raportul între valorile minimă, respectiv maximă, ale iluminării (densității volumice a energiei) într-o zonă restrînsă a domeniului de observație a interferenței

$$V = \frac{\mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max}}, \tag{32}$$

se numește *vizibilitate*.

Valoarea maximă a vizibilității pentru care un anumit detector poate sesiza variația iluminării (densității volumice a energiei) în respectiva zonă (de vizibilitate) se numește *număr (criteriu) de rezolvare* γ_{det}; pentru ochi: $\gamma_{ochi} \approx 0{,}8$.

Raportul dintre lungimea de undă medie (λ) unui dublet spectral format din liniile de lungimile de undă $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$ și $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ și valoarea minimă ($\delta\lambda$) a distanței $\Delta\lambda$ dintre cele două componente, pentru care franjele de interferență de un anumit ordin (m) mai pot fi deosebite (rezolvate) se numește *putere de rezoluție* a interferometrului (în „spectrul" de ordinul m); puterea de rezoluție poate fi bine aproximată [neglijînd fenomenul de dispersie (v. § 2.5)] de relația

$$P \approx m \cdot N \tag{33}$$

unde m este ordinul de interferență, iar N ($\geqslant 2$) este numărul undelor electromagnetice care interferă, în cazul respectivului dispozitiv interferențial.

Valoarea maximă G a lărgimii $\Delta\lambda$ a unui interval spectral admis la intrarea unui interferometru, pentru care nu se observă suprapunerea (chiar parțială) maximelor de interefrență (spectrelor) de ordinele m și $m+1$ se numește *cîmp dispersiv*; valoarea cîmpului dispersiv caracteristic interferenței de ordinul m este bine aproximată (neglijînd dispersia) de formula

$$G = \frac{\lambda}{m} \tag{34}$$

λ fiind lungimea de undă medie a intervalului spectral considerat.

2.4. **Difracția undelor electromagnetice** (în particular, a luminii)

Fenomenul constînd în schimbarea distribuției unghiulare a fluxului energiei electromagnetice a unei unde (electromagnetice) monocromatice* (deci a formei suprafeței de undă și a valorilor — pentru diferite direcții — ale strălucirii energetice) atunci cînd aceasta întîlnește neomogenități ale mediului se numește *difracție* (a respectivei componente monocromatice).

* În cazul utilizării unor radiații electromagnetice compuse (în particular, a luminii „albe") difracția va consta în suprapunerea efectelor provocate asupra fiecărei radiații monocromatice componente; se vor obține astfel succesiuni de franje colorate (spectre) în vizibil, respectiv succesiuni de maxime de difracție ale diferitelor componente spectrale (în afara domeniului vizibil).

În mod obișnuit, difracția este însoțită de fenomenul de suprapunere (interferență) a diferitelor fascicule difractate; *ansamblul franjelor de interferență* (numite în acest caz „franje de difracție") obținute astfel — ansamblu cunoscut și sub numele de *„figură de difracție"* — *poate fi observat în condiții convenabile dacă zona de neomogenitate a mediului* (în particular, obstacolul) *nu are toate dimensiunile* (normale pe direcția undei incidente) *mult mai mari decît lungimea de undă a radiației monocromatice.* Figura de difracție este caracteristică structurii neomogenității (obstacolului) întîlnite de unda electromagnetică generatoare.

După forma suprafeței de undă a radiației electromagnetice incidente, putem distinge:

1) fenomene de *difracție în lumină paralelă* (Fraunhofer), dacă frontul undei incidente este plan;

2) fenomene de *difracție în lumină divergentă* (Fresnel).

Există *două cazuri mai importante* — prin implicațiile lor practice — ale *difracției în lumină paralelă**;

1) *difracția printr-o deschidere* (fantă) *circulară* (de rază r; fig. 12) în care caz, figura de observație este formată din franje circulare, alternativ întunecate și luminoase; raza primului inel întunecat este dată de expresia

$$r_1 \approx 0{,}61 \frac{f\lambda}{r}, \tag{39}$$

iluminarea la distanța $\frac{r_1}{2}$ de centrul figurii de difracție este

$$\mathscr{E}\left(\frac{r_1}{2}\right) \approx 0{,}365\ \mathscr{E}_0 \tag{39'}$$

* Fenomenele de difracție observate pot fi explicate atît calitativ, cît și cantitativ în baza *principiului* formulat mai întîi de *Huygens* și completat de *Fresnel*, care — într-o formă adusă la zi — poate fi enunțat astfel: „contribuția $\Delta\vec{E}_M$ (t; ΔA, r, θ) la intensitatea cîmpului electric din punctul M, la momentul t, datorită difracției provocate de elementul de arie ΔA al neomogenității (obstacolului) este

$$\Delta\vec{E}_M = f(\theta)\cdot\frac{\Delta A}{r}\cdot\cos\left(\left(\omega t + \varphi_{\Delta A} - \frac{2\pi}{\lambda}r\right)\cdot\vec{1}_E\right.$$

unde r este distanța de la elementul ΔA la punctul M, ω și λ sînt respectiv pulsația și lungimea de undă (în mediul punctului M) corespunzînd undei electromagnetice monocromatice incidente), $\varphi_{\Delta A}$ este faza inițială a oscilațiilor electromagnetice ale undei incidente asupra elementului ΔA, $f(\theta)$ este factorul de difracție specific fenomenului particular studiat, avînd o valoare constantă dacă unghiul θ format de direcția undei difractate cu normala $\vec{1}_{\Delta A}$ la elementul ΔA este mic ($\theta \ll 1$ radian) și scăzînd rapid spre zero dacă $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $\vec{1}_E$ este vectorul unitar al tăieturii planului de oscilație al undei (liniar polarizate) incidente și planului normal pe direcția undei difractate".

unde $\mathscr{E}_0$ este iluminarea în centrul figurii de difracție, iar iluminările franjelor circulare luminoase sînt mult mai mici ca $\mathscr{E}_0$, scăzînd rapid de la centrul figurii de difracție;

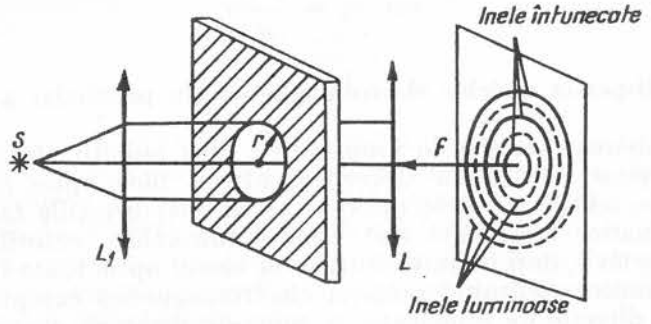


Fig. 12

2) *difracția prin rețeaua optică* (de difracție) prezentînd N zone opace dreptunghiulare (zgîrieturi) de lărgime a, separate de zone transparente de lărgime b (echidistanța d a rețelei este astfel: $d = a + b$) în care caz variația iluminării în planul de observație (fig. 13, a și 13, b) prezintă o serie de maxime (principale) pentru care

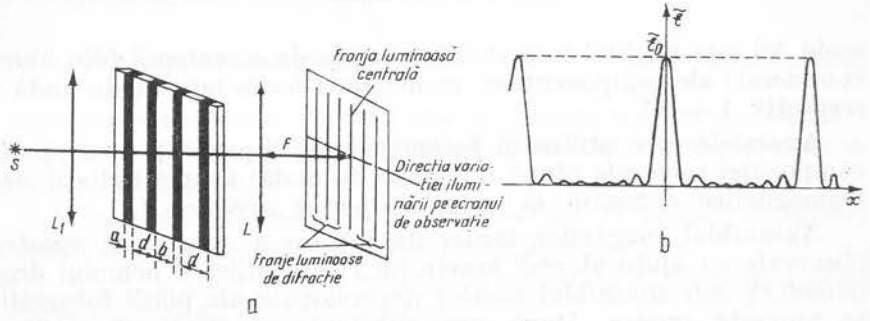


Fig. 13

iluminarea $\mathscr{E}_0$ are aceeași valoare ca și pentru franja centrală, precum și franje luminoase „satelit" secundare, de iluminări mult mai mici; în cazul incidenței normale a undei electromagnetice monocromatice (de lungime de undă λ) pe rețeaua de difracție, sinusul unghiului φ_k format cu normala la rețea de razele (undele) difrac-

tate care dau naştere (prin interferenţă în planul focal al lentilei L) maximului principal de ordinul k este

$$\sin \varphi_k = \frac{k \cdot \lambda}{d}. \tag{40}$$

2.5. Dispersia undelor electromagnetice (în particular a luminii)

Schimbarea direcţiei de propagare a unei radiaţii electromagnetice compuse — în urma trecerii printr-un bloc optic (ansamblu de prisme, lentile şi reţele optice) — astfel încît direcţiile fasciculelor monocromatice emergente sînt diferite (direcţiile vectorilor Poynting respectivi), deşi înaintea intrării în blocul optic toate fasciculele monocromatice alcătuind radiaţia electromagnetică compusă aveau o aceeaşi direcţie de propagare, se numeşte *dispersie a undelor electromagnetice* (luminii).

Pentru caracterizarea efectului de împrăştiere produs de un anumit bloc de dispersie (în mod uzual un ansamblu de prisme optice sau de reţele de difracţie) se utilizează mărimea *dispersie unghiulară*, definită prin

$$D(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}, \tag{41}$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul format de direcţiile de emergenţă (din blocul considerat) ale componentelor monocromatice de lungimi de undă λ, respectiv $\lambda + \Delta\lambda$.

Aparatele care utilizează fenomenul de dispersie pentru studiul compoziţiei spectrale (după lungimile de undă) a unei radiaţii electromagnetice compuse se numesc *aparate spectrale*.

Ansamblul imaginilor fantei de intrare a aparatului spectral, observate cu ajutorul unei lunete (în cazul utilizării ochiului drept detector), sau ansamblul zonelor impresionate ale plăcii fotografice se numeşte *spectru*. După cum substanţa studiată este utilizată drept *sursă* (excitarea emisiei fiind obţinută prin introducerea substanţei respective într-o flacără, sau într-o descărcare electrică) sau drept *absorbant** , spectrele obţinute sînt denumite *spectre de emisie*, respectiv *spectre de absorbţie*.

* În acest caz se folosesc surse avînd un spectru continuu de emisie (de exemplu filamente aduse la incandescenţă).

Pentru caracterizarea dispersiei produse în domeniul vizibil al spectrului de materialul (transparent) al unei prisme optice, se utilizează mărimile *putere* (coeficient) *de dispersie* (k) al materialului, respectiv număr Abbé (ν) definite conform relaţiilor

$$k = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{\nu} \tag{44}$$

unde n_C, n_F şi n_D sînt valorile indicelui de refracţie al materialului optic pentru radiaţiile monocromatice avînd aceleaşi lungimi de undă ca şi liniile C, respectiv F, ale hidrogenului atomic ($\lambda_C \approx 6563$Å, $\lambda_F \approx 4861$ Å), respectiv linia (dubletul) D al sodiului ($\lambda_D \approx 5893$Å).

Pentru caracterizarea efectului de dispersie (a componentelor spectrale) la ieşirea aparatului spectral, se utilizează mărimea *dispersie liniară* definită prin relaţia

$$D_l(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta\lambda} \tag{45}$$

unde Δx este distanţa între înregistrările (obţinute pe placa fotografică a spectrografului, sau pe foaia de imprimare a caracteristicii spectrale — în cazul spectrofotometrelor) corespunzînd componentelor spectrale de lungimi de undă λ şi $\lambda + \Delta\lambda$.

2.6. Polarizarea undelor electromagnetice (în particular a luminii)

Fenomenele în urma cărora starea (parametrii) de polarizare * a unei unde electromagnetice se modifică sînt denumite *fenomene de polarizare a undelor electromagnetice.*

Cele mai simple fenomene în urma cărora se produc modificări ale stării de polarizare a undelor electromagnetice sînt:

1) *reflexia undelor electromagnetice* la suprafaţa de separare a două medii (cu indice de refracţie diferiţi);

2) *transmisia undelor electromagnetice* (trecerea acestor unde dintr-un mediu în altul, cu indice de refracţie diferit);

* Determinată de valoarea gradului de polarizare [v. relaţia (13)], precum şi de ponderea în compoziţia undei studiate a componentelor liniar, respectiv eliptic-polarizate (pentru care vîrful vectorului $\vec{E}$ descrie în timp, într-un punct din spaţiu, o traiectorie eliptică în planul perpendicular pe direcţia de propagare).

3) *trecerea undelor electromagnetice prin medii anizotrope* (cristale), medii izotrope supuse unor tensiuni mecanice, sau unor cîmpuri electrice sau magnetice etc.).

Legea lui Brewster indicînd valoarea unghiului de incidență (i_B), pe suprafața de separare a două medii dielectrice, al unei unde electromagnetice bine colimate (de direcție bine precizată), pentru ca unda reflectată să fie total (liniar) polarizată (cu vibrații ale cîmpului electric normale la planul de incidență) este

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{47}$$

unde n_1 și n_2 sînt indicii de refracție ai mediului în care se produce reflexia, respectiv al celuilalt mediu optic.

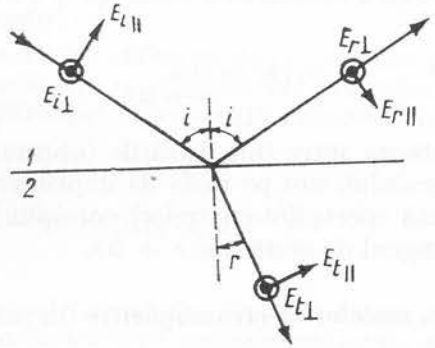


Fig. 14

În cazul incidenței (sub unghiul i) *pe suprafața de separare a* doi *dielectrici* *) de indice de refracție relativ n $\left(\sin r = \frac{\sin i}{n}\right)$, *a unei unde electromagnetice* cu o stare de polarizare arbitrară (grad de polarizare P_i) :

*) Vom înțelege aici prin *medii dielectrice* acele medii pentru care conductibilitatea (mărimea inversă rezistivității) este neglijabilă în raport cu produsul dintre permitivitatea dielectrică (a mediului) și pulsația undei electromagnetice

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \ll \varepsilon \cdot \omega .$$

1) se constată că gradele de polarizare P_r, P_t corespunzînd undelor reflectată și transmisă*, diferă de acela (P_i) corespunzînd undei incidente

$$P_r = \frac{\cos^2 (i + r) \cdot [1 + P_i] - \cos^2 (i - r) \cdot [1 - P_i]}{\cos^2 (i + r) \cdot [1 + P_i] - \cos^2 (i - r) \cdot [1 - P_i]}$$

$$P_t = \frac{(1 + P_i) - \cos^2 (i - r) \cdot [1 - P_i]}{(1 + P_i) + \cos^2 (i - r) \cdot [1 - P_i]}; \tag{51}$$

2) coeficienții de reflexie și transmisie** ai undei, depind de gradul de polarizare al undei incidente

$$R = \frac{R_{\parallel} + R_{\perp}}{2} + P_i \frac{R_{\parallel} - R_{\perp}}{2}, \quad T = \frac{T_{\parallel} + T_{\perp}}{2} + P_i \cdot \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{2} \tag{52}$$

valorile coeficienților de reflexie $R_{\parallel}$, $R_{\perp}$ și transmisie $T_{\parallel}$, $T_{\perp}$ cores-

* În cazul undelor incidente pe suprafața de separare a două medii, fenomenele de reflexie, transmisie și polarizare sînt în strînsă legătură, datorîndu-se (toate) interacțiunilor undei cu particulele materiale din zona de graniță ; în cadrul teoriei fenomenologice a cîmpului electromagnetic (Maxwell), se dă seamă de aceste interacțiuni, prin așa-numitele *condiții de trecere* a cîmpului :

(i) *continuitatea componentelor cîmpurilor electric și magnetic paralele cu suprafața de separare*

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}, \quad H_{1\parallel} = H_{2\parallel} ; \tag{49}$$

(ii) *continuitatea componentelor inducțiilor electrică și magnetică perpendiculare pe suprafața de separare*

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}, \quad \mu_1 H_{1\perp} = \mu_2 H_{2\perp} \tag{49'}$$

[dacă respectiva suprafață e lipsită de distribuții de sarcină și curenți].

** Coeficienții de reflexie (R), absorbție (A) și transmisie (T) sînt definiți prin relațiile :

$$R = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \Phi_{refl}}{\Delta \Phi_{inc}}, \quad A = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \Phi_{abs}}{\Delta \Phi_{inc}}, \quad T = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \Phi_{tr}}{\Delta \Phi_{inc}} \tag{52'}$$

unde $\Delta \Phi_{inc}$, $\Delta \Phi_{refl}$, $\Delta \Phi_{abs}$ și $\Delta \Phi_{tr}$ sînt fluxurile undelor incidentă, reflectată, absorbită și transmisă de un element de arie ΔA al suprafeței delimitînd cele două medii ; între acești coeficienți există relația (rezultînd din principiul conservării energiei)

$$R + T + A = 1. \tag{52''}$$

punzînd cazurilor $P_i = +1$, respectiv $P_i = -1$, fiind date de relaţiile

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}, \quad R_{\perp} = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

$$T_{\parallel} = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)}, \quad T_{\perp} = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i+r)} \tag{52'}$$

* * *

2.1.1. O rază de lumină monocromatică trece dintr-un mediu caracterizat de valorile ε_1, μ_1 ale permitivităţii dielectrice şi permeabilităţii magnetice, în alt mediu cu ε_2, μ_2, apoi se refractă din nou în primul mediu. Ştiind că unghiul de deviaţie este δ, iar grosimea celui de al doilea mediu este e, să se calculeze : a) grosimea aparentă a celui de al doilea mediu, b) distanţa între punctele de incidenţă şi emergenţă ale razei de pe suprafaţa plană delimitînd cele două medii.

2.1.2. Să se găsească relaţia dintre amplitudinile cîmpurilor electric şi magnetic ale unei unde electromagnetice staţionare.

2.1.3. Utilizînd relaţia obţinută în cazul problemei precedente, să se determine expresiile, în funcţie de amplitudinile E_0 şi B_0 ale cîmpului electric, respectiv inducţiei magnetice, valorilor momentană, respectiv mediată peste timp pe durata perioadei oscilaţiilor cîmpului electromagnetic, ale densităţii volumice a energiei electromagnetice pentru o undă progresivă care se propagă într-un mediu omogen şi izotrop.

2.1.4. Utilizînd relaţia obţinută în cazul problemei precedente, să se determine valoarea densităţii fluxului de energie electromagnetică. Să se deducă de asemenea expresia vectorială corespunzînd acestei mărimi fizice.

2.1.5. Densitatea fluxului energiei electromagnetice pentru unda incidentă pe pămînt de la Soare este : $S \approx 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}}$. Să se determine amplitudinile intensităţilor cîmpurilor electric şi magnetic corespunzînd acestei unde.

2.1.6. Să se determine gradul de polarizare al unei unde electromagnetice liniar-polarizate în raport cu un plan (paralel cu direcţia undei) formînd unghiul θ cu planul de oscilaţie al undei ; discuţie.

2.1.7. Planele de oscilaţie corespunzînd unui număr de N unde liniar-polarizate avînd densităţi egale ale fluxurilor energetice şi o aceeaşi direcţie de propagare, formează unghiuri egale între ele. Să se determine gradul de polarizare al fasciculului în raport cu un plan (paralel cu direcţia undelor) formînd unghiul θ cu unul dintre planele de oscilaţie.

2.2.1. Se consideră o placă de sticlă în formă de cerc. Pe o dreaptă perpendiculară pe planul plăcii, trecînd prin centrul acesteia, sînt situate două surse S_1 şi S_2 care emit lumină în mod uniform în toate direcţiile. Fie φ fluxul luminos emis de fiecare sursă, α_1 şi α_2 unghiurile sub care se vede din S_1 şi S_2 un diametru al plăcii. Se cere : a) să se găsească relaţia care trebuie să existe între unghiurile α_1 şi α_2 pentru ca fluxul total incident pe placă să fie Φ,

b) ştiind că unghiul sub care se vede de pe conturul plăcii segmentul $S_1 S_2$ este θ, să se afle α_1 şi α_2 şi minimul lui Φ.

c) să se discute soluţiile cînd $\alpha_1 = 2\alpha_2$ (punctele b) şi c) sînt independente între ele).

2.2.2. Puterea utilă consumată pentru emisia de către un tub de descărcare în vapori de sodiu a liniei (dubletului) D al sodiului ($\lambda_D \approx 5893$ Å, distanţa între componentele dubletului : $\Delta\lambda \approx 6$Å) este $P = 0{,}2$ W. Cunoscînd valoarea vizibilităţii relative (în regim diurn) pentru acest dublet : $V_D \approx 0{,}766 \dfrac{\text{Wl}}{\text{W}}$, să se determine fluxul luminos corespunzînd dubletului D emis de respectiva sursă luminoasă (echivalentul fotometric al fluxului efectiv va fi luat $K \approx 650$ lm / Wl).

2.2.3. În tabelul care urmează sînt prezentate valorile vizibilităţii relative, în regim diurn, pentru intervalul spectral $\lambda \in [5900\text{ Å}, 6300\text{Å}]$:

λ (Å)	5900	6000	6100	6200	6300
$V_\lambda\left(\frac{\text{Wl}}{\text{W}}\right)$	0,757	0,631	0,503	0,381	0,265

Să se găsească o expresie liniară (valabilă pentru acest interval spectral) a vizibilităţii relative în funcţie de numărul de undă $\left(\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}\right)$.

2.2.4. Să se găsească contribuţia radiaţiilor luminoase din intervalul spectral 5900 Å $\leqslant \lambda \leqslant$ 6300 Å la valorile fluxurilor efectiv, respectiv luminos, emise de un element de arie $\frac{1}{600\,000}$ m² al suprafeţei unui corp negru, aflat la temperatura de solidificare a platinei ($T \approx 2044°$K).

2.2.5. Să se deducă relaţia dintre emitanţa (radianţa) luminoasă şi luminanţa unei surse cu emisie luminoasă uniformă.

2.2.6. Să se deducă legea iluminării (exprimînd iluminarea unei suprafeţe, produsă de o sursă punctiformă, în funcţie de intensitatea luminoasă a sursei).

2.2.7. O sursă de lumină avînd o intensitate luminoasă de 80 candele luminează o suprafaţă plană sub un unghi de incidenţă de 60°, de la o distanţă de 2 m. Să se calculeze iluminarea produsă.

2.2.8. O lampă electrică de 200 cd se află la distanţa de 2 m de o carte, ce se găseşte pe o masă. Iluminarea cărţii este de 2 lx. Sub ce unghi cade lumina pe carte? La ce înălţime deasupra mesei se află lampa?

2.2.9. La ce distanţă x de baza unui stîlp se află punctul iluminat cu $\mathscr{E} = 0{,}6$ lx, dacă lampa electrică ce produce această iluminare se află la înălţimea $h = 6$ m, iar intensitatea luminoasă pe direcţia punctului considerat este $\mathscr{I} = 100$ cd?

2.2.10. Un bec electric este situat la înălţimea $h = 2$m deasupra centrului unei mese rotunde cu raza $r = \frac{\sqrt{21}}{4}$ m. Să se afle distanţa d cu care trebuie coborît becul pentru ca iluminarea unui punct de la marginea mesei să devină egală cu iluminarea iniţială a centrului mesei.

2.2.11. O lampă de birou poate fi deplasată numai în sus şi în jos. La distanţa de 1 m de piciorul perpendicularei coborîte din lampă pe masa de lucru este aşezată o carte. La ce înălţime deasupra mesei trebuie fixată lampa pentru ca iluminarea cărţii să fie maximă?

2.2.12. Pentru iluminatul electric al unei străzi se folosesc lămpi electrice suspendate de stîlpii reţelei, amplasaţi pe o singură parte a străzii. Distanţa între piciorul perpendicularei coborîte din lampă pe sol şi axul străzii este $d = 4$ m şi este constantă, astfel încît lampa nu poate fi deplasată decît pe verticală. Să se determine: a) la ce înălţime h deasupra solului trebuie montată lampa, astfel încît iluminarea celui mai apropiat punct al axului străzii de unul din stîlpii reţelei

să fie maximă; b) care este valoarea acestei iluminări, cunoscînd că lampa are pe această direcţie intensitatea luminoasă $\mathscr{I} = 360$ cd?

2.2.13. O sursă luminoasă punctiformă cu intensitatea $\mathscr{I} = 1$ cd trece cu viteza constantă $v = 1$ m/s pe lîngă un paravan aşezat perpendicular pe direcţia ei de deplasare. Să se reprezinte grafic dependenţa de timp a iluminării unei suprafeţe elementare situate la distanţa $d = 1$ m de direcţia de deplasare şi să se arate la ce distanţă de paravan se află sursa, atunci cînd această iluminare este maximă.

2.2.14. O carte este iluminată de două becuri. Razele primului bec cad sub un unghi $i_1 = 30°$, iar ale celui de al doilea sub un unghiu $i_2 = 45°$ faţă de normală. Proiecţiile becurilor pe planul cărţii sînt egal depărtate de carte. Ce intensitate $\mathscr{I}_2$ trebuie să aibă al doilea bec pentru a produce o aceeaşi iluminare ca şi primul, a cărui intensitate este $\mathscr{I}_1 = 60$ cd?

2.2.15. În piaţa unui sat se montează, la aceeaşi înălţime h, două becuri de intensităţi $\mathscr{I}_1$ şi $\mathscr{I}_2$ aşezate la distanţa D unul de celălalt. Care este locul geometric al punctelor din piaţă egal iluminate de fiecare din cele două becuri. Discuţie.

2.2.16. Să se evalueze strălucirile aparente ale discurilor Soarelui, Lunii, precum şi strălucirea filamentului unui bec de incandescenţă, ştiind că — în cazul incidenţei normale — aceste surse luminoase determină iluminări de cca. 10^5 lx, 0,2 lx, respectiv 250 lx. Distanţele de la Pămînt la Soare şi respectiv la Lună vor fi considerate drept: $d_S = 1{,}5 \cdot 10^{11}$m, $d_L = 4 \cdot 10^8$ m, razele Soarelui şi Lunii ca fiind egale cu: $R_S = 6{,}94 \cdot 10^8$ m, $R_L = 1{,}73 \cdot 10^6$ m, distanţa de la becul de incandescenţă la suprafaţa iluminată: $d = 4$ m, aria aparentă a filamentului: $A = 10^{-5}$ m².

2.2.17. Un aparat de iluminat în formă de glob sferic din sticlă mată are intensitatea luminoasă în direcţia axului vertical $\mathscr{I} = 81$ cd. Cunoscînd că strălucirea aparatului în această direcţie este $\mathscr{L} = 2{,}58 \cdot 10^3$ nt, să se determine diametrul globului.

2.2.18. Filamentul unei lămpi electrice cu o intensitate luminoasă de 1000 cd este introdus într-o incintă sferică cu diametrul $d = 0{,}2$ m. Să se determine: a) fluxul luminos radiat de această sursă de lumină, b) emitanţa luminoasă şi luminanţa acestei surse de lumină, c) iluminarea, emitanţa luminoasă şi luminanţa unui ecran care primeşte 10% din fluxul luminos radiat de sursa considerată. Coeficientul de reflexie al suprafeţei ecranului este $R = 0{,}8$. Aria ecranului are valoarea $A = 0{,}25$ m².

2.3.1. Să se deducă condiţiile cărora trebuie să le satisfacă două unde electromagnetice monocromatice, liniar-polarizate, pentru a avea un înalt grad de coerenţă ($\gamma \leqslant 1$). Discuţie.

2.3.2. Ţinînd seamă că emisia radiaţiilor electromagnetice de către microsistemele fizice (atomi, molecule etc.) decurge în mod discontinuu, durata ($t_{em} \sim 10^{-8}$ s) a actelor de emisie fiind mult mai mică decît durata ($t_p \sim 10^{-4}$ s) intervalelor dintre actele succesive de emisie, să se deducă condiţia suplimentară căreia trebuie să-i satisfacă — în cazul utilizării metodei dedublării sursei — lungimile d_1, d_2 (respectiv δ_1, δ_2) drumurilor geometrice (respectiv, optice) parcurse de undele care se suprapun, de la sursă pînă în locul interferenţei.

2.3.3. Căror condiţii trebuie să le satisfacă diferenţele Δd, $\Delta\delta$ ale drumurilor geometrice, respectiv optice, ale undelor obţinute prin dedublare, pentru ca în zona interferenţei să se obţină valori maxime, respectiv minime, ale densităţii volumice a energiei (respectiv — în vizibil — ale iluminării).

2.3.4. Diferenţa drumurilor geometrice a două unde luminoase, de aceeaşi lungime de undă $\lambda = 6000$ Å, care se întîlnesc într-un punct, este $\Delta d = 3 \cdot 10^{-4}$ m. Se întreabă : în locul întîlnirii este observată o franjă luminoasă sau o franjă întunecată ?

2.3.5. Să se determine poziţiile franjelor întunecate şi luminoase obţinute cu ajutorul interferometrului Young (v. fig. 4), în cazul în care distanţa D de la planul celor două fante la ecran este mult mai mare decît distanţa l dintre cele două fante.

2.3.6. Într-un dispozitiv cu oglinzi Fresnel (v. fig. 5), fanta, iluminată cu lumină monocromatică corespunzînd liniei C a hidrogenului atomic : $\lambda_C = 6563$ Å, se găseşte la distanţa $\rho = 0{,}1$ m de muchia comună oglinzilor. La distanţa $d = 0{,}9$ m de aceeaşi muchie se găseşte paravanul pe care se observă franjele de interferenţă. Ştiind că unghiul dintre planele oglinzilor are valoarea $\alpha = 2'$, se cere :

a) mărimea interfranjei,

b) deschiderea maximă admisibilă a fantei pentru care se mai observă franjele de interferenţă,

c) intervalul spectral admisibil în jurul lungimii de undă $\lambda_C = 6563$ Å pentru care se mai pot distinge 20 franje.

2.3.7. Într-o experienţă de interferenţă cu oglinda Lloyd (fig. 2.3.7), sursa de lumină monocromatică, prevăzută cu o fantă de lărgime s reglabilă, este aşezată la distanţa $h = 5 \cdot 10^{-2}$ m de oglinda

plană şi la distanţa $D = 1$ m de paravan. Să se evalueze lărgimea maximă a fantei pentru care pe ecran se mai pot observa $N = 40$ franje de interferenţă.

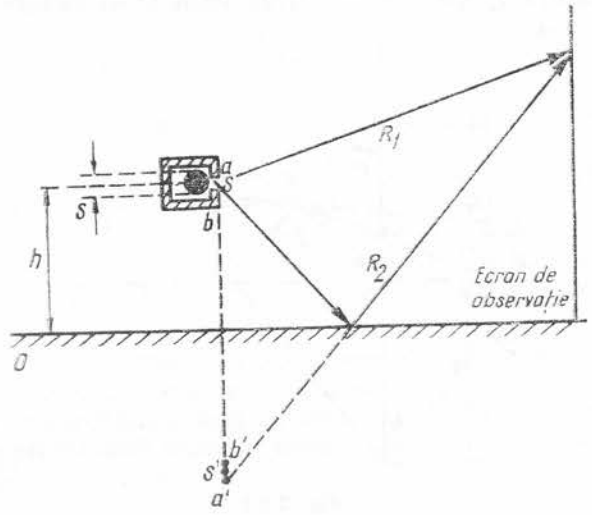


Fig. 2.3.7

2.3.8. Un dispozitiv interferenţial constă dintr-o sursă de lumină monocromatică ($\lambda = 5000$ Å), o bilentilă Billet obţinută prin distanţarea cu $d = 10^{-3}$ m a jumătăţilor, obţinute prin tăierea după un plan trecînd prin axa optică a unei lentile convergente de distanţă focală $f = 0{,}5$ m şi rază (corespunzînd circumferinţei exterioare a lentilei) $r = 5 \cdot 10^{-3}$ m, precum şi dintr-un paravan opac (v. fig. 8) prezentînd o deschidere D aşezată la distanţa $p = 1$ m de bilentilă. Să se determine :

a) distanţa minimă L_{min} la care trebuie aşezat faţă de bilentilă ecranul de observaţie E, pentru ca în planul acestui ecran să poată fi observate franje de interferenţă ;

d) distanţa L_i dintre bilentilă şi luneta de observaţie (a franjelor de interferenţă) începînd de la care zona de interferenţă este delimitată de razele trecînd prin deschiderea D a paravanului opac şi centrele optice C', C'', ale celor două părţi ale bilentilei (v. fig. 2.3.8 R) ;

c) numărul franjelor luminoase şi întunecate care pot fi observate (cu ajutorul lunetei) în planul situat la distanţa $L = 3{,}4$ m de bilentilă.

2.3.9. Secțiunea unei biprisme Fresnel cu un plan perpendicular pe planul de simetrie al biprismei are forma unui triunghi isoscel cu baza $2a$ și unghiurile refringente (egale) α mult mai mici ca 1 radian. La distanța $q \gg a$ (fig. 2.3.9) de baza biprismei se așază — în

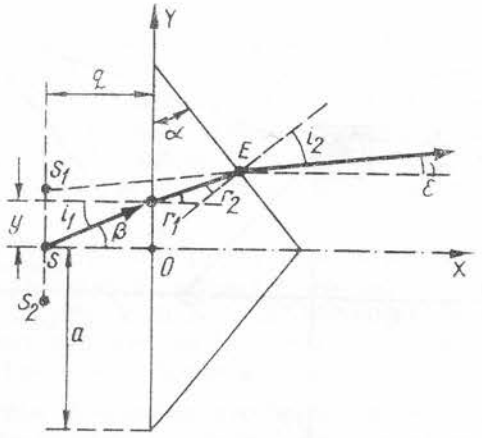


Fig. 2.3.9

planul de simetrie al acesteia — sursa luminoasă punctiformă S. Să se arate că după trecerea prin prisme, razele emergente din fiecare parte a biprismei formează cîte un fascicul divergent, prelungirile acestor raze intersectîndu-se în două puncte — cu rol de surse virtuale, așezate simetric față de sursa reală S.

2.3.10. Un dispozitiv interferențial constă dintr-o sursă punctiformă de lumină monocromatică ($\lambda = 7000$ Å), o lentilă convergentă așezată la distanța $p = 0{,}1$ m de sursă, o biprismă Fresnel așezată la distanța $b = 0{,}5$ m de sursă și o lunetă de observație. Depărtînd treptat luneta de biprismă se constată că — pentru distanța d între biprismă și lunetă de ordinul metrului — interfranja păstrează o valoare constantă $i = 1$ mm, franjele de interferență dispărînd dacă distanța dintre biprismă și lunetă este mai mare de 10 m. Să se determine :

a) distanța focală a lentilei,

b) unghiul refringent α al biprismei,

c) lățimea $2a$ (v. fig. 2.3.9) a biprismei,

d) valoarea d' a distanței d pentru care pot fi observate un număr maxim de franje, precum și valoarea maximă a numărului de franje întunecate observabile.

Indicele de refracție al materialului biprismei are valoarea $n = 1{,}5$.

2.3.11. Un interferometru Michelson (v. fig. 6) utilizează o sursă de lumină monocromatică ($\lambda = 5000$ Å) și două lame cu fețe plan-paralele (una separatoare, cealaltă compensatoare), identice și avînd suprafețele active (producînd reflexii sau- și -transmisii) paralele între ele. Știind că dispozitivul este reglat astfel încît planele oglinzilor O_2, O_1 să fie normale pe direcțiile razelor reflectată, respectiv emergentă de la lama separatoare, iar aceste raze să fie perpendiculare, să se determine :

a) valorile unghiurilor α_1, α_2 formate de suprafețele active ale celor două lame cu planele oglinzilor O_1, O_2 ;

b) ordinul de interferență corespunzînd situației cînd diferența distanțelor de la zona (îngustă) de incidență pe lama separatoare a fasciculului bine colimat, la oglinzile O_1, respectiv O_2, este $d_1 - d_2 = 10^{-2}$ m.

2.3.12. Pentru efectuarea unei experiențe Wiener (fig. 2.3.12), o placă fotografică de granulație fină este introdusă în mediul M, fiind așezată sub unghiul α față de suportul S. Placa fotografică este iluminată cu un fascicul luminos monocromatic ($\lambda = 6980$Å) normal

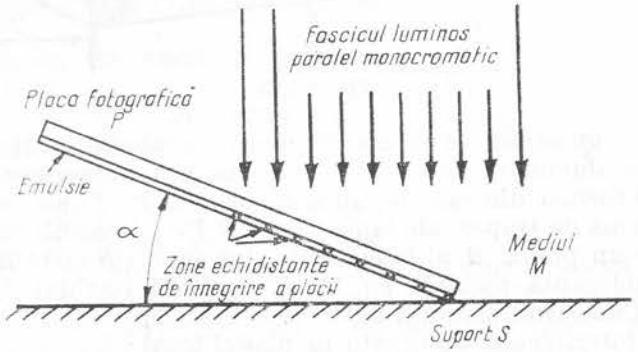


Fig. 2.3.12

pe suportul S. Indiferent de natura mediilor S și M (cu condiția ca M să prezinte o anumită transparență pentru fasciculul luminos), se constată că, pentru unghiuri α suficient de reduse pe placă apar linii întunecate (zone de impresionare) paralele între ele (și cu suprafața suportului) și echidistante. După cum indicele de refracție al mediului M are o valoare mai mare sau mai mică decît indicele de refracție al suportului, de-a lungul liniei de sprijin a plăcii fotografice pe suport apare o linie întunecată, respectiv una de impresionare

minimă. Știind că înnegrirea plăcii fotografice este datorată depunerii argintului metalic apărut prin descompunerea — prin iluminare — a bromurii de argint din emulsia fotografică, se cere :

a) să se interpreteze rezultatele obținute ;

b) să se verifice interpretarea dată, știind că echidistanța dintre liniile întunecate este $\Delta l = 20$ μm, în cazul cînd placa fotografică este așezată sub unghiul $\alpha = 1°$ față de suport.

2.3.13. Un dispozitiv interferențial constă dintr-o lamă Lummer-Gehrcke de lungime $L = 0{,}5$ m și grosime $d = 3 \cdot 10^{-2}$ m, o lentilă cu distanța focală $f = 1$ m și axa optică paralelă cu muchiile lungi

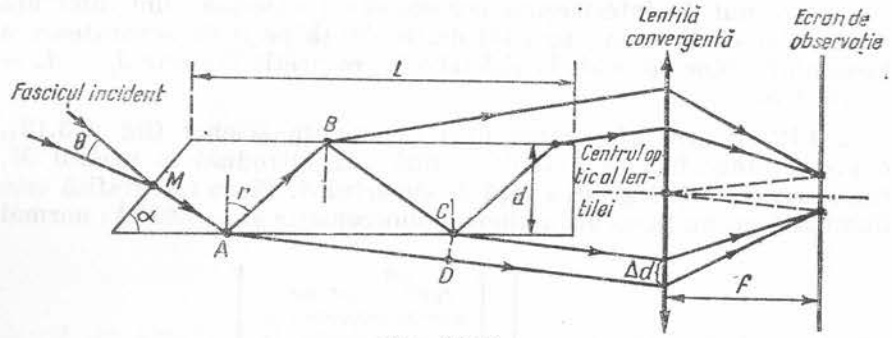


Fig. 2.3.13

ale lamei și un ecran de observație așezat în planul focal al lentilei. Lama este iluminată de un fascicul luminos monocromatic ($\lambda = 7000$ Å) format din raze paralele cu planele P, P' ale fețelor laterale, în formă de trapez, ale lamei (fig. 2.3.13) ; direcțiile razelor incidente într-un punct M al feței oblice sînt cuprinse între normala în M și semidreapta paralelă cu P, P' formînd unghiul $\theta = 15'$ cu normala. Cunoscînd distanța dintre cele mai depărtate maxime principale de interferență observate în planul focal : $d_{max} = 22{,}14$ cm și unghiul format de muchiile lungi ale lamei cu fața sa oblică : $\alpha = 41°30'$, să se evalueze :

a) indicele de refracție al lamei,

b) numărul fasciculelor emergente de fiecare parte a lamei,

c) ordinul interferenței realizate,

d) aspectul figurii de interferență din planul ecranului, în cazul cînd atenuările fasciculelor luminoase în lamă, lentilă și aer sînt neglijabile.

2.3.14. Se consideră suprapunerea a două sisteme de maxime de interferență, de aceeași amplitudine. Să se evalueze vizibilitatea

celor două sisteme în cazul în care maximele principale ale unui sistem coincid cu primele minime ale celui de al doilea sistem și invers.

2.3.15. Dispozitivul interferențial descris în problema 2.3.13 este iluminat cu o radiație luminoasă compusă din două componente monocromatice, de lungimi de undă apropiate, centrate în jurul a 7000 Å. Să se determine diferența minimă dintre cele două lungimi de undă, pentru ca figura de interferență obținută pe ecranul de observație să permită observarea distinctă a două sisteme de maxime principale (să fie astfel „rezolvat" dubletul, prin evidențierea celor două componente ale sale).

2.3.16. Pentru observarea inelelor Heidinger se folosește un dispozitiv interferențial (fig. 2.3.16) format dintr-o sursă de lumină monocromatică, o lamă cu fețe plan-paralele avînd grosimea $g = 1$ cm și indicele de refracție $n = 1{,}5$ și o lentilă convergentă cu distanța focală $f = 2$ m. Știind că în centrul inelelor Heidinger se observă un maxim de iluminare și cunoscînd diametrul celui de al 25-lea inel întunecat : $d = 17{,}15$ cm, să se determine :

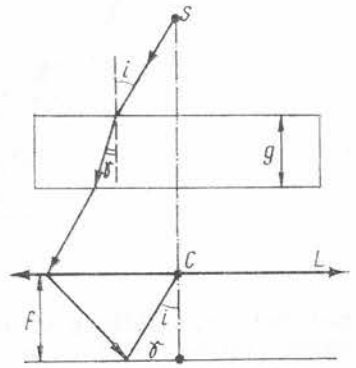


Fig. 2.3.16

a) lungimea de undă a radiației monocromatice,

b) valoarea cîmpului dispersiv G corespunzînd zonei celui de al 25-lea inel Heidinger ; discuție.

2.3.17. Pentru controlul paralelismului fețelor plane ale unei piese transparente, în cazul în care unghiul α dintre aceste fețe are valori extrem de reduse (mult mai mici ca 1 radian), una din fețele piesei este iluminată cu un fascicul luminos monocromatic ($\lambda = 6\,000$ Å) dirijat normal pe fața respectivă. Știind că distanța dintre franjele întunecate localizate pe fața iluminată a piesei este $\Delta l = 5 \cdot 10^{-4}$ m, să se determine :

a) valoarea unghiului α,

b) cîmpul dispersiv G corespunzînd unei grosimi $g = 5 \cdot 10^{-3}$ m a piesei ; discuție.

Se dă indicele de refracție corespunzînd piesei : $n = 1{,}5$.

2.3.18. Pentru controlul planeității fetei F a unei piese optice transparente, avînd fața opusă riguros plană, se așază piesa respectivă cu fața studiată în contact cu o lamă cu fețe plan-paralele (fig. 2.3.18),

fața opusă fiind iluminată cu un fascicul luminos monocromatic ($\lambda = 6\,000$ Å) paralel, incident sub unghiul $i = 30°$ față de normala la această suprafață. Știind că, în lumină reflectată, se observă pe fața studiată a piesei un sistem de inele întunecate concentrice, ale căror raze satisfac relației $\frac{r_n}{\sqrt{n}} = \text{const.} \approx 2{,}45 \cdot 10^{-3}$ m (n — ordi-

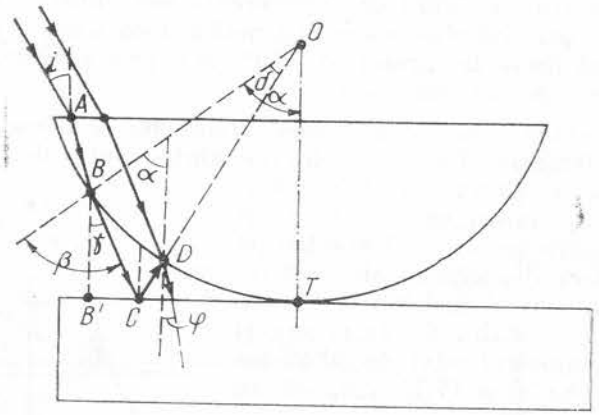


Fig. 2.3.18

nul inelului, stabilit prin numerotarea uzuală, începînd de la centrul sistemului de inele), să se deducă :

a) forma feței studiate în zona contactului cu lama cu fețe plane și paralele,

b) raza de curbură a feței studiate în zona contactului,

c) cum se modifică figura de interferență dacă observația inelelor Newton se face în lumină transmisă ?

2.3.19. Un interferometru Jamin constă din două lame identice cu fețe plane și paralele, dispuse în poziția de paralelism. Lama separatoare a interferometrului este iluminată cu un fascicul luminos monocromatic ($\lambda = 5\,500$ Å), slab divergent, unghiurile i de incidență pe această lamă satisfăcînd condiției $|i - i_0| \ll 1$ radian, unde $i_0 = \frac{\pi}{4}$ radiani. În drumul celor două fascicule emergente de la lama separatoare, așezate paralel cu direcția acestor fascicule pentru $i = i_0$, se găsesc (fig. 2.3.19) cuve de aceeași lungime $l = 2$ cm, umplute cu aer, respectiv clor, la presiunea normală $p = 1$ atm. Știind că în cazul extragerii — cu ajutorul unei pompe de vid — a aerului din cuva C_1,

respectiv a clorului din cuva C_2, se observă deplasări ale sistemului de franje de interferență, obținute în planul focal al lentilei L cu $\Delta m_a = 10$, respectiv $\Delta m_{Cl} = 31{,}5$ interfranje, să se determine :

a) indicii de refracție absoluți ai aerului, respectiv clorului,

b) sensurile deplasărilor figurii de interferență în cele două cazuri.

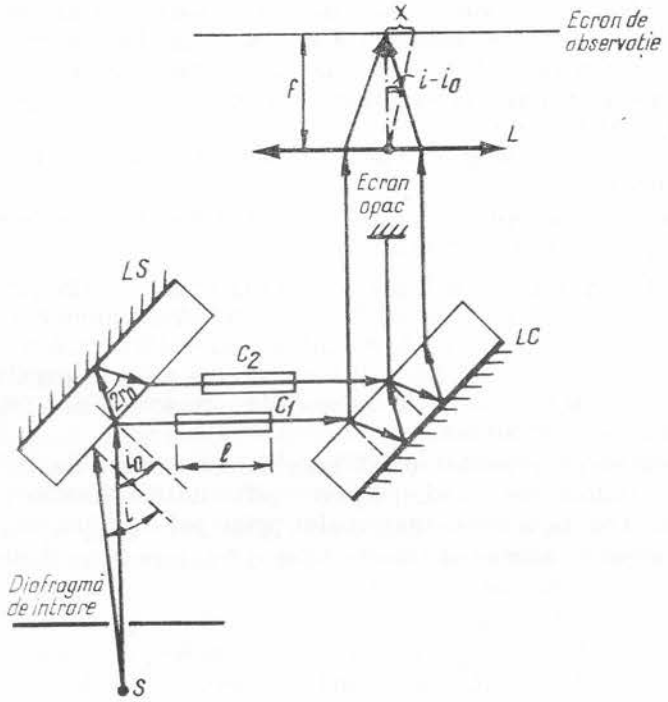


Fig. 2.3·19

2.4.1. O sursă punctiformă de lumină monocromatică ($\lambda = 6\,000$ Å) se găsește la distanța $a = 1$ m de o diafragmă circulară de deschidere reglabilă, încorporată într-un paravan opac. Crescînd treptat raza deschiderii diafragmei, se constată că pentru $r = 1$ mm, în centrul zonei de „lumină geometrică", obținută pe un ecran așezat la distanța $b = 5$ m de paravan, se observă o pată întunecată. Să se arate dacă principiul Huygens-Fresnel poate explica — calitativ și cantitativ — acest fenomen aflat în contradicție flagrantă cu legile opticii geometrice.

2.4.2. Să se calculeze pentru lumină monocromatică ($\lambda = 5\,000$ Å) distanța focală a unei rețele formate din zone succesiv opace și trans-

parente, situate pe suprafaţa unei calote sferice avînd diametrul $d = 2$ cm şi raza de curbură $a = 1$ m. Se ştie că razele circumferinţelor delimitînd zonele succesive satisfac condiţiei: $\frac{r_k}{\sqrt{k}} = \text{const} = 0{,}5$ mm.

2.4.3. În cazul cînd diametrul deschiderii diafragmei reglabile din problema 2.4.1 are valoarea $d = 0{,}816$ mm, iluminarea centrului figurii de difracţie obţinute în planul ecranului de observaţie este practic egală cu iluminarea aceluiaşi punct în absenţa paravanului opac. Să se determine:

a) raportul ariilor primei zone Fresnel şi deschiderii diafragmei în acest caz;

b) unghiul solid sub care se vede deschiderea diafragmei din sursă, în cazul specificat; interpretare.

2.4.4. O fantă dreptunghiulară avînd lăţimea $l = 125$ μm este iluminată normal de un fascicul luminos uniform, monocromatic, de lungime de undă $\lambda = 5\,000$ Å. Ştiind că razele difractate sînt concentrate în planul focal al unei lentile convergente aşezată paralel cu planul fantei, la mică distanţă de aceasta şi avînd distanţa focală $f = 0{,}5$ m, să se evalueze:

a) iluminările primelor două maxime secundare de difracţie în funcţie de iluminarea (medie) $\mathscr{E}_0$ corespunzînd maximului principal;

b) lărgimea L_0 a zonei maximului principal de difracţie.

Se neglijează atenuările fasciculelor difractate între fantă şi planul focal al lentilei convergente.

2.4.5. Două sisteme de inele de difracţie, de aceleaşi dimensiuni şi avînd aceleaşi valori ($\mathscr{E}_0$) ale iluminării în centru, se suprapun într-un acelaşi plan, astfel încît primul inel întunecat al fiecărui sistem trece prin centrul inelelor de difracţie ale celuilalt sistem. Utilizînd rezultatele teoriei difracţiei în lumină paralelă printr-o deschidere circulară (v. breviarul) să se evalueze vizibilitatea corespunzînd zonei centrale a celor două sisteme, în dispunerea indicată.

2.4.6. Care este valoarea minimă ψ a unghiului dintre direcţiile de observaţie corespunzînd componentelor unei stele duble, pentru ca imaginile acestora, obţinute cu ajutorul unui telescop lucrînd cu lumină monocromatică ($\lambda = 5\,000$ Å) şi avînd diametrul diafragmei de intrare (a lentilei telescopului) $d = 63{,}6$ cm, să poată fi distinse?

2.4.7. Ştiind că raza pupilei (deschiderea circulară aşezată în faţa cristalinului) ochiului omenesc este $r_0 = 0{,}8$ mm, în timp ce pentru vulturi aceeaşi rază atinge valori de cca. 3 mm, să se evalueze:

a) puterile de separare [distanţele minime dintre puncte situate — faţă de un instrument optic — la distanţe egale cu distanţa D a vederii optime (clare), care pot fi observate distinct cu ajutorul respectivului instrument] corespunzînd ochiului omenesc ($D_{om} = 0{,}25$ m), în cazurile cînd observaţiile se fac în lumină monocromatică: $\lambda_1 = 4\,000$ Å, respectiv $\lambda_2 = 7\,500$ Å,

b) lungimea minimă a unui obiect ale cărui extremităţi pot fi observate distinct de către om, respectiv vultur, în cazul cînd respectivul obiect se află la distanţa $d = 1$ km; discuţie.

2.4.8. Care este dimensiunea minimă a unui detaliu situat pe Lună (distanţa Pămînt-Lună fiind de cca. $4 \cdot 10^5$ km), pentru ca extremităţile respectivului detaliu să fie observate distinct cu ajutorul unui telescop situat pe Pămînt, diametrul obiectivului telescopului fiind $D = 2$ m? Dar în cazul cînd se folosesc camere de televiziune, cu diametrul diafragmei de intrare $d = 10$ cm, respectivele camere fiind situate la bordul unui satelit aflat la 400 km de suprafaţa Lunii? Se consideră că, în ambele cazuri, observaţiile sînt efectuate în lumină monocromatică $\lambda = 6\,000$ Å.

2.4.9. Să se evalueze lungimea de undă pe care trebuie să lucreze emiţătorul unui radiolocator capabil să distingă la distanţa $D = 20$ km avioanele dintr-o formaţie de zbor, în cazul cînd cele mai mici distanţe dintre avioanele formaţiei sînt de ordinul $d = 200$ m. Se ştie că raza antenei radiolocatorului este $r = 2$ m.

2.4.10. În anul 1965, una dintre antenele (avînd diametrul $D = 300$ m) radiotelescopului din Aricebo (Porto-Rico) a permis evidenţierea incidenţei unor semnale radio cu lungimea de undă $\lambda = 0{,}3$ m, interpretate de radioastronomi ca provenind din zona stelei Tau-Ceti. Să se evalueze fracţiunea din unghiul solid total, corespunzînd zonei spaţiului din care ar putea proveni radiosemnalele evidenţiate.

2.4.11. Un microscop optic, lucrînd în lumină monocromatică: $\lambda_0 = 6\,000$ Å, obţine imaginea clară a microobiectului studiat atunci cînd distanţa de la acesta la obiectiv este egală cu $d = 3$ mm. Ştiind că raza diafragmei de intrare (situată la nivelul suprafeţei obiectivului) este $r = 4$ mm, să se determine:

a) puterea medie de separare a microscopului;

b) grosismentul puterii de separare (raportul dintre puterea de separare a ochiului şi cea corespunzînd microscopului);

c) modificările care trebuie aduse microscopului descris, pentru a putea fi observate detalii de dimensiuni încă mai reduse.

2.4.12. Să se evalueze puterea de separare a unui microscop cu înregistrare fotografică, lucrînd cu radiaţii monocromatice ($\lambda_0 =$

2 000 Å), știind că criteriul de rezolvabilitate al celulei fotoelectrice cu ajutorul căreia se explorează (în lumină transmisă) placa fotografică are valoarea $\rho = 0{,}984$, iar apertura numerică a obiectivului (în cazul cînd între acesta și microobiect se găsește pelicula unui anumit lichid de imersie) este : $n \sin u = 1{,}3$. Se dau următoarele valori ale iluminărilor medii în puncte aflate la diferite distanțe r față de centrul unui sistem de inele de difracție (r_1 este raza primului inel întunecat, iar $\mathcal{E}_0$ este iluminarea medie în centrul sistemului de inele de difracție).

r/r_1	0,35	0,40	0,45	0,80	0,85	0,90
$\mathcal{E}(r)/\mathcal{E}_0$	0,6263	0,5394	0,4511	0,0421	0,0214	0,0085

2.4.13. O rețea plană de difracție, caracterizată de valorile a și b ale lărgimilor porțiunilor opace, respectiv transparente (fig. 2.4.13), este iluminată de un fascicul electromagnetic monocromatic, incident sub unghiul θ_0 față de normala la suprafața rețelei. Să se deducă :

a) condițiile cărora trebuie să le satisfacă unghiul θ corespunzînd unei anumite direcții a fasciculelor difractate, pentru ca pentru respectiva direcție, să se observe un maxim principal de difracție ;

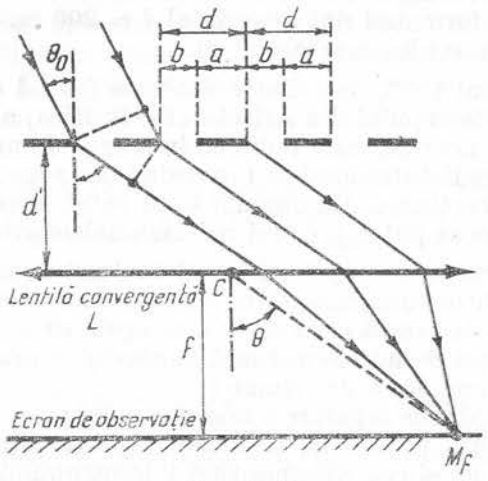


Fig. 2.4.13

b) valoarea minimă a echidistanței $d = a + b$ pentru care pot fi observate, pentru unghiuri $\theta > \theta_0$, cel puțin trei maxime principale de difracție ;

c) valoarea raportului $\frac{a}{b}$ pentru care iluminarea corespunzînd maximului principal de ordinul $m = 1$, atinge — pentru valori date ale echidistanței d, lungimii rețelei și iluminării rețelei de către fasciculul incident — o valoare maximă;

d) valoarea unghiului $\theta > \theta_0$ corespunzînd celui de al doilea maxim principal observat (în indexare nu se include maximul central, corespunzînd fasciculelor nedeviate : $\theta = \theta_0$), în cazul satisfacerii condițiilor de la punctele precedente.

2.4.14. Să se constate dacă, pentru o rețea de difracție utilizabilă în domeniul vizibil al spectrului și prezentînd o densitate înaltă de trăsături pe unitatea de lungime, există posibilitatea de a distinge trăsăturile succesive (și deci de a determina echidistanța rețelei), cu ajutorul unui microscop utilizînd radiații din domeniul vizibil.

2.4.15. O rețea de difracție avînd $n = 99 \frac{\text{trăsături}}{\text{mm}}$ și lungimea (în direcția transversală pe trăsături) $l = 1$ cm, este iluminată normal cu radiația electromagnetică corespunzînd liniei de rezonanță (din domeniul ultravioletului fotografic) a atomilor de bor, maximele de difracție fiind înregistrate pe o placă fotografică așezată în planul focal al lentilei de convergență (v. fig. 2.4.13). Știind că maximul principal de ordinul 2 se obține pentru radiațiile difractate sub unghiul $\theta = 2° 50'$ față de direcția de incidență, precum și faptul că pentru maximele de ordine $m \geqslant 3$ se poate observa că linia de rezonanță studiată constă de fapt din două componente spectrale apropiate, să se evalueze :

a) lungimea de undă (medie) corespunzînd liniei de rezonanță a borului ;

b) cîmpul dispersiv în spectrul de ordinul trei ;

c) diferența $\Delta\lambda$ a lungimilor de undă corespunzînd componentelor spectrale alcătuind linia de rezonanță a borului.

2.4.16. Pentru determinarea, prin metoda lui Compton (a incidenței „razante" a fasciculelor de radiații X pe rețele optice), a lungimilor de undă corespunzînd componentelor spectrale ale seriei K de radiații X emise de un anticatod de cupru, se folosește dispozitivul experimental prezentat în fig. 2.4.16. Știind că placa fotografică are forma unui sector de cilindru, avînd raza $R = 2{,}1$ m și axa coincizînd cu una dintre trăsăturile centrale ale rețelei plane de difracție $\left(\text{avînd } n = 515 \frac{\text{trăsături}}{\text{mm}}\right)$, precum și faptul că pe placa fotografică se ob-

servă, începînd de la o linie mai intensă (corespunzînd fasciculului nedifractat), linii paralele de maxim local al înnegririi, situate (față de

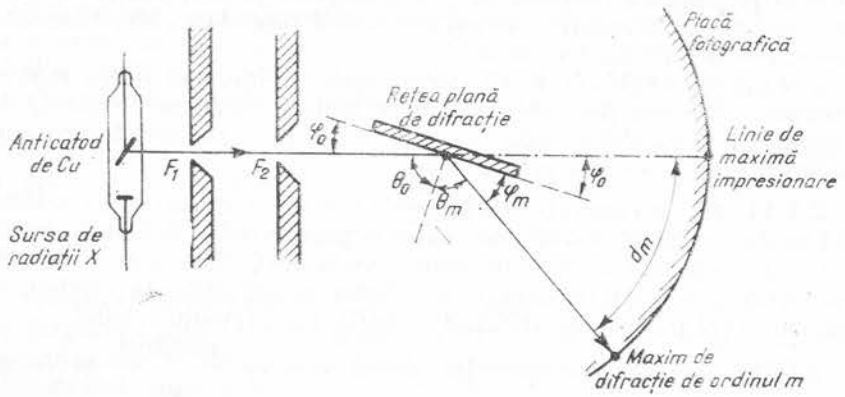


Fig. 2.4.16

precedenta) la distanțele : 3,7 ; 4,08 ; 5,6 ; 6,55 ; 6,65 ; 7,30 și 7,48 cm, se cere :

a) să se interpreteze spectrul înregistrat pe placa fotografică,

b) să se evalueze lungimile de undă corespunzînd componentelor spectrale ale radiației X incidente.

2.4.17. Un fascicul electromagnetic monocromatic, bine colimat (avînd o direcție de incidență, caracterizată de vectorul unitar $\vec{i}$, bine-precizată) este difractat de o rețea tridimensională (prezentînd periodicități după trei direcții necoplanare), perioadele corespunzînd acestei rețele fiind date (atît mărimile, respectivelor perioade, cît și direcțiile de periodicitate) prin vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Să se deducă :

a) valorile, corespunzînd maximelor de difracție, ale vectorului unitar $\vec{\delta}$ al direcției fasciculului difractat ;

b) direcțiile vectorilor-diferențe $\vec{\delta} - \vec{i}$ corespunzînd maximelor de difracție;

c) valorile sin θ corespunzînd maximelor de difracție, 2θ fiind unghiul format de vectorii unitari $\vec{i}$ și $\vec{\delta}$.

2.4.18. Cu ajutorul unor filtre și a unui sistem de fante, se extrage, din radiația X emisă de un anticatod de cupru, componenta K_α a seriei K : $\lambda(K_\alpha) \approx 1{,}242$ Å, care este trimisă, sub forma unui fascicul îngust, asupra unui cristal de sare gemă. Știind că valoarea minimă

a unghiului dintre direcțiile fasciculelor difractat și incident, pentru care se observă un maxim de difracție, este $2\theta = 31°40'$, se cere :

a) să se evalueze perioada rețelei cubice a cristalului de clorură de sodiu (NaCl) ;

b) să se verifice rezultatul obținut, ținînd seamă că masa moleculei-gram, respectiv densitatea clorurii de sodiu au valorile : $M = 5{,}844 \cdot 10^{-2}$ kg·mol^{-1}, $\rho = 2{,}16 \cdot 10^3$ kg·m^{-3}. Se dă valoarea numărului Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ molecule/mol.

2.5.1. O particulă de masă m și sarcină electrică q efectuează — sub acțiunea cîmpului electric $E = E_0 \cos \omega t$ al unei unde electromagnetice monocromatice — mici oscilații în jurul poziției sale de echilibru. Se presupune că forța $\vec{F}_r$ de rezistență a mediului la deplasarea particulei și rezultanta $\vec{R}_{el}$ a forțelor care se opun ieșirii particulei din poziția de echilibru sînt date de expresiile $\vec{F}_r = -\vec{r} \cdot \vec{v}$, respectiv $\vec{R}_{el} = -k\vec{\xi}$, unde $\vec{v}$ este viteza particulei, iar $\vec{\xi}$ este vectorul de poziție corespunzînd locului unde se află particula la momentul considerat, în raport cu poziția de echilibru a particulei. Se cere :

a) să se deducă ecuația diferențială a mișcării purtătorului de sarcină ;

b) să se arate că ecuația diferențială descriind oscilațiile particulei încărcate electric admite o soluție de forma : $\xi = a \cos(\omega t + \varphi)$ și să se determine amplitudinea a și defazajul φ dintre elongația oscilației particulei și intensitatea cîmpului electric.

2.5.2. Se consideră un dielectric omogen, de permitivitate dielectrică ε, umplînd complet spațiul dintre armăturile unui condensator plan. Să se deducă :

a) expresia intensității curentului de „deplasare" (datorat variației cîmpului electric dintre armăturile condensatorului) ;

b) expresia intensității curentului electric determinat de acțiunea asupra dielectricului a cîmpului electric ($E = E_0 \cos \omega t$) al unei unde electromagnetice monocromatice, ținînd seamă că dielectricul conține N tipuri distincte de purtători de sarcină, care, sub acțiunea respectivului cîmp electric, efectuează mici oscilații în jurul pozițiilor corespunzătoare de echilibru (se va presupune că direcția cîmpului electric al undei electromagnetice este normală pe armăturile condensatorului) ;

c) dependențele rezistivității și permitivității dielectrice relative a dielectricului străbătut de unda electromagnetică monocromatică de frecvența oscilațiilor electromagnetice ale respectivei unde ; interpretare.

2.5.3. Să se arate dacă poate fi explicat fenomenul de dispersie care apare la trecerea unui fascicul electromagnetic dintr-un dielectric în altul (și în particular să se explice fenomenul descompunerii luminii „albe", de către o prismă optică, în fascicule de diferite lungimi de undă) prin acțiunea cîmpurilor electrice oscilante ale undelor electromagnetice asupra purtătorilor de sarcină „legați" ai dielectricului, purtători care pot efectua mici oscilații în jurul respectivelor poziții de echilibru.

2.5.4. Știind că parametrii q_l, n_l, m_l, k_l, r_l ($l = 1, 2, \ldots, N$) caracterizînd un dielectric (v. problema 2.5.2) satisfac condițiilor : $q_i \approx q_j$, $n_i \approx n_j$, $r_j\,\omega \ll k_j - m_j\omega^2$, $|k_i - m_i\,\omega^2| \ll k_j - m_j\,\omega^2$, pentru $i \neq j$ și $\omega \in (\omega', \omega'')$, unde $\omega' < \omega'' < \omega_j$ (ω_j fiind pulsația proprie a oscilațiilor purtătorilor de sarcină de tipul j), se cere :

a) să se deducă o corelație liniară, valabilă pentru intervalul spectral $\lambda \in \left[\lambda'' = \frac{2\pi c}{\omega''},\ \lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}\right]$ între o funcție de indicele de refracție al dielectricului și o alta de lungimea de undă ;

b) să se constate în ce măsură datele experimentale existente pentru cuarț :

λ (Å)	2537	3034	4100	4861	5893	7685
n	1,5963	1,5770	1,5565	1,5497	1,5442	1,5391

corespund unei corelații liniare de tipul celei deduse în cadrul punctului precedent.

2.5.5. De o parte și de alta a unei lentile subțiri confecționate din flint greu ($n_C = 1{,}74727$; $n_F = 1{,}7747$), se așează, la distanțe (față de lentilă) egale cu dublul distanței focale f_F (a lentilei) corespunzînd liniei F a hidrogenului atomic, o sursă punctiformă (situată pe axa optică a lentilei), respectiv o placă fotografică. Știind că diametrul lentilei este $d = 4$ cm, să se determine raza ρ a inelului determinat pe placă de radiațiile de lungime de undă $\lambda_C = 6563$ Å ; discuție.

2.5.6. Să se deducă condiția ce trebuie îndeplinită de parametrii a N lentile subțiri alipite, pentru ca imaginile (obținute cu ajutorul sistemului optic respectiv) corespunzînd liniilor C și F ale hidrogenului atomic să coincidă.

2.5.7. Pentru obținerea unui obiectiv acromatic, se alipește o lentilă confecționată din flint greu ($n_D = 1{,}7550$; $\nu = 27{,}5$) de lentila biconvexă simetrică (avînd razele de curbură $r' = r'' = 1$ m) confecționată din crown cu borosilicat ($n_D = 1{,}51$; $\nu = 63{,}4$). Să se determine :

a) distanța focală pe care trebuie s-o prezinte lentila confecționată din flint ;

b) genul (convex, concav) al suprafeței exterioare a lentilei din flint, precum și raza de curbură corespunzătoare ;

c) distanța focală a obiectivului acromatic realizat.

2.5.8. O prismă de unghiu refringent A este iluminată de un fascicul paralel, compus din radiații electromagnetice avînd lungimile de undă cuprinse în intervalul spectral îngust λ, $\lambda + \Delta\lambda$. Fasciculele emergente din prismă sînt concentrate în diferite puncte ale planului focal al unui bloc acromatic convergent, de distanță focală f, așezat astfel încît axa sa optică să coincidă cu direcția de emergență a radiației de lungime de undă medie λ_m din fasciculul incident. Știind că lățimea fasciculului incident, în planul secțiunii prismei, este $l \gg \lambda$, să se determine :

a) expresia dispersiei unghiulare determinate de prismă ;

b) expresia dispersiei liniare corespunzînd dispozitivului descris ;

c) expresia puterii de rezoluție a prismei (în condițiile de iluminare indicate) ;

d) expresiile simplificate ale celor trei mărimi de mai sus, în condițiile deviației minime a fasciculului electromagnetic.

2.5.9. Un fascicul electromagnetic paralel conținînd componente spectrale de lungimi de undă cuprinse între 2537 Å și 7685 Å iluminează în întregime fața de intrare a unei prisme confecționate din cuarț. Prisma (a cărei secțiune are forma unui triunghiu echilateral cu latura $a = 0{,}1$ m) este străbătută după traseul de minimă deviație de radiația avînd lungimea de undă $\lambda = 4100$ Å. Utilizînd pentru indicele de refracție al cuarțului, valorile date în enunțul problemei 2.5.4, să se evalueze :

a) valorile dispersiilor unghiulare corespunzînd diferitelor intervale spectrale ;

b) valorile puterilor de rezoluție corespunzînd diferitelor intervale spectrale ;

c) valoarea minimă a grosismentului unghiular al blocului acromatic convergent așezat după prismă, cu ajutorul căruia să poată fi distinse vizual componentele spectrale (din domeniul vizibil) rezolvate cu ajutorul prismei.

2.5.10. O rețea de difracție are $n = 100\ \frac{\text{trăsături}}{\text{mm}}$ și lungimea $l = 2$ cm. Se cere :

a) să se constate dacă este posibilă rezolvarea dubletului D al sodiului : $\lambda_{D1} = 5889{,}6$ Å, $\lambda_{D2} = 5895{,}6$ Å, cu ajutorul acestei rețele, în spectrul de ordinul întîi ;

b) să se determine dispersia unghiulară a rețelei în același ordin al spectrului;

c) să se determine valoarea minimă a grosismentului unghiular al unei lunete cu ajutorul căreia să poată fi observate vizual componentele dubletului D al sodiului, rezolvate de rețeaua optică;

d) dispersia liniară în același ordin al spectrului, în cazul utilizării unui obiectiv de distanță focală $f = 0{,}25$ m.

2.6.1. Utilizînd condițiile de continuitate ale componentelor cîmpurilor electromagnetice la granița de delimitare a doi dielectrici (v. breviarul) să se deducă relațiile dintre componentele paralele și perpendiculare pe planul de incidență ale intensităților cîmpurilor electrice corespunzînd undelor reflectată și transmisă rezultate în urma incidenței, pe suprafața de separare a doi dielectrici, a unei unde liniar-polarizate.

2.6.2. Pot fi explicate în baza formulelor (Fresnel) deduse în cadrul problemei precedente, rezultatele experimentale obținute prin experiențe de tipul Wiener (v. problema 2.3.16)?

2.6.3. Să se deducă expresiile gradelor de polarizare, în raport cu planul de incidență, ale fasciculelor electromagnetice rezultate în urma incidenței, pe suprafața de separare a doi dielectrici, a unui fascicul electromagnetic paralel.

2.6.4. Să se deducă valoarea unghiului de incidență pentru care fasciculul reflectat de suprafața de separare a doi dielectrici este total polarizat, indicînd de asemenea direcția oscilațiilor cîmpului electric al undei reflectate în acest caz.

2.6.5. Care este gradul de polarizare al luminii transmise de un bloc Stoletov format de $N = 6$ plăci de sticlă crown ($n = 1{,}50$) cu fețe plane și paralele, așezate într-un tub cilindric astfel ca unghiul dintre axul tubului și normala la suprafețele paralele ale plăcilor să fie egal cu unghiul Brewster (corespunzînd polarizării totale a fasciculului reflectat)? Se consideră că gradul de polarizare al fasciculului paralel incident după axul tubului este: $P_0 = 0$.

2.6.6. Să se deducă expresiile coeficienților de reflexie și transmisie corespunzînd incidenței unui fascicul electromagnetic paralel pe suprafața de separare a doi dielectrici omogeni.

2.6.7. Să se calculeze gradul de polarizare P_i (în raport cu planul de incidență) al unui fascicul de radiații electromagnetice, al cărui coeficient de reflexie — corespunzător incidenței sub unghiul $i = 60°$ — pe suprafața de separare aer-flint greu ($n = \sqrt{3}$) este $R = 0{,}20$.

3. OPTICĂ FOTONICĂ

BREVIAR

În întreaga fizică, experimentatorul observă interacțiile pe care le reprezintă prin forțe. Fenomenele optice sînt explicate — în totalitatea lor — în cadrul interacțiilor electromagnetice.

Pentru a explica și studia fenomenele optice în care nu intervine decît interacția luminii cu ea însăși, se face ipoteza că din punct de vedere cantitativ, radiația luminoasă este caracterizată printr-o mărime ondulatorie, adică printr-o funcție de undă de forma

$$y = a \cos (\omega t - kx)^*. \qquad (1)$$

În această ipoteză sînt explicate fenomenele de interferență și de difracție a luminii.

1) *Fenomenele optice explicate pe baza teoriei electromagnetice a luminii*

Pentru a explica fenomenele optice în care intervine interacția dintre lumină și substanță, este necesar ca, în afară de aspectul ondulatoriu al mărimii fizice atașată fasciculului de lumină, să se facă și o ipoteză asupra naturii acestei mărimi.

Pe baza constatării că viteza luminii este egală cu viteza undelor electromagnetice în vid, Maxwell arată că un fascicul de lumină poate fi reprezentat fie prin intensitatea cîmpului electric, fie prin alte mărimi caracteristice cîmpului electromagnetic. În modul acesta a apărut teoria electromagnetică a luminii cu ajutorul căreia sînt explicate fenomenele de:

— interferență
— difracție
— reflexie
— refracție
— absorbție

---

* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ fiind lungimea de undă.

— dispersie (dependența vitezei luminii într-un mediu de lungimea de undă). Fenomenele de absorbție și de dispersie sînt explicate în ipoteza că substanța este constituită din electroni care interacționează cu intensitatea cîmpului electric al undei luminoase.

2) *Necesitatea teoriei corpusculare (fotonice) a luminii*

Teoriei electromagnetice a luminii, care explică fenomenele optice datorite interacției luminii cu ea însăși și interacției luminii cu substanța, pe care le-am amintit anterior, îi scapă, însă, o serie de fenomene în care intervine sub o formă detaliată interacția luminii cu atomii și moleculele din care este constituită substanța. Aceste fenomene sînt:

— emisia liniilor spectrale
— absorbția liniilor spectrale
— efectul fotoelectric
— efectul Compton ș.a.

Pentru a se explica aceste fenomene se renunță la aspectul ondulatoriu al luminii, considerîndu-se că lumina este de natură corpusculară. Astfel, se introduce conceptul de foton. Fotonul este caracterizat prin energia

$$E = h\nu \tag{2}$$

și prin impulsul

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{3}$$

$h \approx 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ J·s fiind constanta lui Planck. Relațiile (2) și (3) stabilesc legătura între caracteristicile corpusculare ale radiației (E și p) și caracteristicile ondulatorii (ν — frecvența și λ — lungimea de undă).

3) *Efectul fotoelectric*

Efectul fotoelectric al metalelor constituie emisia de electroni, în vid, din metalul catodului unei celule fotoelectrice.

a) *Legile efectului fotoelectric.* Cercetările experimentale efectuate asupra efectului fotoelectric al metalelor, au dus la următoarele legi:

1°. Pentru o lungime de undă λ dată, intensitatea curentului fotoelectric de saturație, I_s, este proporțională cu fluxul luminos, Φ, care cade pe suprafața metalică a catodului fotocelulei, adică

$$I_s = C_1 \cdot \Phi. \tag{4}$$

Această lege are limite de valabilitate foarte largi. Astfel, pentru un flux de 10^{-10} lm se obțin curenți de ordinul a 10^{-16} A. Liniaritatea

între fluxul de lumină și curent se păstrează și pentru fluxuri de lumină de 10^7 ori mai mari.

2°. Tensiunea electrică negativă U_0 pentru care curentul fotoelectric emis devine, în mod efectiv, nul, este independentă de fluxul de radiație luminoasă incident și este proporțională cu frecvența radiației luminoase

$$U_0 = C_2 \cdot \nu. \tag{5}$$

3°. Curentul fotoelectric I este diferit de zero pentru o frecvență a radiației luminoase incidente mai mare decît o anumită frecvență ν_m, adică

$$I \neq 0, \text{ pentru } \nu > \nu_m \text{ sau } \lambda < \lambda_m \tag{6}$$

deoarece

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{7}$$

c fiind viteza luminii.

b) *Teoria efectului fotoelectric.* Rezultatele obținute din experiențele efectuate asupra efectului fotoelectric nu se pot explica pe baza teoriei ondulatorii asupra luminii. Într-adevăr, în conformitate cu teoria ondulatorie:

— energia cinetică a electronilor emiși ar fi trebuit să crească cu intensitatea luminoasă;
— curentul fotoelectric ar fi trebuit să se producă la orice frecvență, cu condiția ca intensitatea luminoasă să fie suficient de mare;
— un electron ar fi trebuit să aibă un oarecare timp pentru a acumula energia necesară ieșirii de la suprafața metalului, timp cu atît mai lung cu cît intensitatea luminoasă este mai mică.

Legile efectului fotoelectric au fost explicate în 1905 de Albert Einstein care face apel la teoria corpusculară a luminii, adică se admite conceptul de foton — un fascicul de radiație de frecvență ν și lungime de undă λ fiind constituit din n fotoni avînd fiecare energia $E = h\nu$ și impulsul $p = \frac{h}{\lambda}$.

Conform teoriei lui Einstein, efectul fotoelectric corespunde transferului de energie de la un foton la electron; deci, o ciocnire foton-electron cu anihilarea fotonului. Dacă E_{ex} este energia necesară ca un electron să fie extras (să scape) din substanță (suprafața metalului), legea de conservare a energiei cînd un foton de energie $h\nu$ întîlnește un electron care este emis cu o energie cinetică E_c, se scrie

$$h\nu = E_{ex} + E_c \tag{8}$$

unde

$$E_c = \frac{1}{2}\, mv^2 = eU_0 \tag{9}$$

e fiind sarcina electronului extras din metal.

Considerînd

$$E_{ex} = h\nu_m \tag{10}$$

şi ţinînd seama de (9), ecuaţia (8) devine

$$h(\nu - \nu_m) = \frac{1}{2}\, mv^2 = eU_0. \tag{11}$$

Rezultă

$$U_0 = \frac{h}{e}\,(\nu - \nu_0). \tag{12}$$

Relaţia (12) explică legea 2° găsită experimental (proporţionalitatea dintre U_0 şi ν). Din ecuaţia (11) se observă că $\frac{1}{2}\, mv^2 \neq 0$ pentru $\nu > \nu_m$ (sau $\lambda < \lambda_m$). Astfel, se confirmă legea 3° găsită experimental ($I \neq 0$ pentru $\nu > \nu_m$).

Prima lege este explicată direct ţinînd seama de faptul că fluxul radiaţiei este proporţional cu energia $E = nh\nu$. Ca atare, cînd creşte numărul de fotoni va creşte numărul de electroni emişi. Tot de aici se observă că intensitatea luminoasă creşte datorită mărimii numărului de fotoni de aceeaşi energie $h\nu$. Creşterea numărului de fotoni nu are nici o influenţă asupra energiei cinetice maxime a electronilor emişi şi, astfel, potenţialul U_0 este independent de intensitatea radiaţiei luminoase. De asemenea, această teorie nu implică existenţa unei întîrzieri în emisia electronilor în raport cu iluminarea, oricare ar fi intensitatea acesteia.

c) Ipoteza naturii ondulatorii a luminii ne-a permis să ne explicăm un număr mare de fenomene. Aici, ipoteza naturii corpusculare ne permite să explicăm alte fenomene. Aceste două ipoteze sînt —aparent— în conflict în cadrul fizicii clasice. În acelaşi timp, această dualitate este un fapt de experienţă şi mecanica cuantică permite să se împace aceste două aspecte.

c) *Aplicaţiile efectului fotoelectric*

Aplicaţiile de bază ale efectului fotoelectric sînt în construcţia de :

Detectoare de radiaţii luminoase
— celule fotoelectrice
— fotomultiplicatoare
Tuburi pentru televiziune
— tuburi videocaptoare
— tuburi videoreproducătoare
Tuburi de memorie.

d) *Alte tipuri de efect fotoelectric.* În afara efectului fotoelectric extern la suprafaţa metalelor, amintim existenţa :
— efectului fotoelectric interior
— efectului fotoelectric al radiaţiilor X.

Efectul fotoelectric interior constă în micşorarea rezistenţei unui semiconductor care absoarbe lumină. Sub acţiunea luminii, într-un semiconductor se produce generarea de purtători de sarcină. Electronii liberi şi golurile ce apar sub acţiunea luminii contribuie la creşterea conductibilităţii semiconductorului.

Efectul fotoelectric în cazul semiconductoarelor este interior, deoarece fotoelectronii care apar nu părăsesc semiconductorul.

Aplicaţiile cele mai importante ale acestui efect îl constituie fotoelementele care sînt utilizate la bateriile solare şi la măsurarea fluxurilor luminoase în fotografie.

Efectul fotoelectric al radiaţiilor X constă în emisia de electroni din interiorul substanţei sub acţiunea radiaţiilor X. Fotoelectronii X au o energie foarte mare. Acest efect este explicat tot cu ajutorul teoriei lui Einstein, energia fotonilor X fiind consumată pentru a extrage electronii din atom. Studiile asupra efectului fotoelectric al radiaţiilor X au importanţă deosebită în cercetările efectuate asupra nivelurilor de energie interioare ale electronilor în atomi.

4) *Efectul Compton*

Efectul Compton constă, de fapt, din ciocnirea inelastică foton-electron, cu schimbarea lungimii de undă λ a fotonului incident, deoarece o parte din energia şi impulsul fotonului incident sînt transferate electronului. Astfel, dacă λ_0 este lungimea de undă a fotonului incident, aplicînd legile conservării energiei şi impulsului în cazul ciocnirii inelastice foton-electron, lungimea de undă λ a fotonului, în urma ciocnirii, este dată de expresia

$$\lambda = \lambda_0 + 2\,\frac{h}{m_0 c}\,\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{13}$$

unde θ este unghiul dintre direcţia fotonului incident şi cea a fotonului

emergent, iar $\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0{,}0242 \cdot 10^{-10}\ m = 0{,}0242$ Å este lungimea de undă Compton.

5) *Cuantele de lumină (fotonii) și fenomenele de interferență și de difracție*

La optica ondulatorie am observat că teoria electromagnetică a luminii este corectă din punct de vedere macroscopic. Fenomenele de interferență și de difracție sînt fenomene esențialmente ondulatorii. De asemenea, este clar că la scară microscopică teoria corpusculară a luminii este singura teorie capabilă să explice fenomene tipice de absorbție și de împrăștiere, cum sînt efectul fotoelectric și efectul Compton.

Din analiza unor experiențe efectuate, se arată că ipoteza cuantelor de lumină întîmpină același gen de dificultăți în toate cazurile de interferență sau de difracție.

Astfel, se constată că — în general — lumina se prezintă sub cele două aspecte, ondulatoriu și corpuscular, fiecare dintre aceste aspecte apărînd într-un fel mai mult sau mai puțin evident în funcție de fenomenul cercetat. Relațiile de corespondență (2) și (3) permit să se treacă de la un mod de descriere la celălalt. Din experiența de împrăștiere pe o placă, se arată că legătura dintre aspectul corpuscular și cel ondulatoriu ale radiației este o legătură statistică, anume: probabilitatea de a localiza fotonul într-un punct este egală cu intensitatea undei luminoase în acest punct, calculată prin metodele opticii ondulatorii.

* * *

3.1. Să se determine energia, impulsul și masa fotonului a cărui lungime de undă corespunde:

a) domeniului vizibil al spectrului ($\lambda_v \to 6000$ Å);

b) radiației Röntgen cu lungimea de undă de 1 Å;

c) radiației gamma cu lungimea de undă de 10^{-2} Å.

Se cunosc: viteza luminii $c \approx 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$ și constanta lui Planck, $h \approx 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$)*.

3.2. Să se calculeze lungimea de undă și impulsul unui foton a cărui energie este egală cu energia de repaus a electronului.

Se cunosc masa de repaus a electronului, $m_0 \approx 9{,}109558 \cdot 10^{-31}$ kg, viteza luminii $c \approx 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$ și constanta lui Planck $h \approx 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$.

3.3. Lungimea de undă maximă (limita dinspre roșu) a efectului fotoelectric la potasiu corespunde valorii de 5770 Å. Se cere să se calculeze valoarea minimă a energiei unui foton necesară pentru a elibera un electron din acest metal.

Se cunosc constanta lui Planck și viteza luminii.

*) În problemele în care nu se cere determinarea unor constante (h, c, m_0 etc.), acestea se presupun cunoscute.

3.4. Cunoscîndu-se energia de extracție a electronului din metalele alcaline:

metalul	Li	Na	Rb	Cs
E_{ex} [eV]	2,39	2,2	2,13	1,89

se cere să se calculeze lungimile de undă maxime ale radiației pentru care apare efectul fotoelectric.

3.5. Impulsul transferat de un fascicul monocromatic de fotoni la o suprafață $S = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2$ în intervalul de timp $\Delta t = 30$ s este $p_f = 3 \cdot 10^{-9}\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

Se cere, să se determine energia incidentă pe unitatea de arie în unitatea de timp pentru acest fascicul.

3.6. Lungimea de undă de prag (λ_M) pentru un oarecare metal este 2750 Å.

Se cere: a) energia de extracție a unui electron din acest metal;

b) viteza maximă a electronilor emiși de metal care este bombardat cu lumină avînd lungimea de undă $\lambda = 1800$ Å;

c) energia cinetică maximă a acestor electroni.

Se cunosc: sarcina electronului $e \approx 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C și masa de repaus a electronului, $m_0 \approx 9{,}10956 \cdot 10^{-31}$ kg.

3.7. O fotocelulă consistă dintr-un catod central (dintr-o sferă de tungsten) și un anod (suprafața internă a anodului fiind argintată). Diferența de potențial de contact dintre electrozi, egală cu $U_c = 0{,}6$ V, accelerează electronii emiși. Fotocelula este iluminată cu lumină avînd lungimea de undă $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-7}$ m.

a) Ce diferență de potențial de întîrziere trebuie aplicată între electrozi pentru a anula fotocurentul?

b) Cu ce viteză vor ajunge fotoelectronii la anod dacă nu se aplică nici o diferență de potențial exterioară între catod și anod?

Energia de extracție (lucrul de ieșire) a electronului din tungsten este 4,48 eV.

3.8. Ce număr de fotoni cu lungimea de undă $\lambda = 6000$ Å dintr-un fascicul de lumină paralel va avea impulsul total egal cu impulsul mediu al atomului de heliu, la temperatura $T = 300°K$?

Masa atomului de heliu este $m = 6{,}6444 \cdot 10^{-27}$ kg, constanta lui Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/grd. Se consideră viteza medie a atomilor $< v > = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$.

3.9. Iluminînd suprafaţa unui metal cu radiaţii luminoase care conţin linii de lungime de undă $\lambda_1 = 2790$ Å şi $\lambda_2 = 2450$ Å, potenţialul de frînare U_0 este egal cu 0,66 V, respectiv 1,26 V. Se cere să se determine:

a) valoarea constantei lui Planck;

b) lucrul de ieşire al electronului din metal şi

c) frecvenţa minimă a unei radiaţii luminoase pentru a obţine curent fotoelectric.

3.10. Suprafaţa unui metal oarecare este iluminată cu lumină avînd lungimea de undă $\lambda = 3500$ Å. Curentul fotoelectric obţinut — în acest caz — poate fi anulat prin aplicarea unei diferenţe de potenţial de frînare U_0. Micşorînd lungimea de undă a radiaţiei luminoase cu $\Delta\lambda = 500$ Å, diferenţa de potenţial de frînare U_0 a fost mărită cu $\Delta U_0 = 0{,}59$ V pentru a tăia din nou curentul fotoelectric. Pe această cale se poate determina sarcina electronului.

Să se determine valoarea sarcinii electronului.

3.11. Să se arate că în momentul interacţiei fotoelectrice, energia luminoasă este concentrată într-un punct. Se va ţine seama de faptul că efectul fotoelectric este provocat instantaneu.

3.12. Deoarece fotonii prezintă o masă de mişcare inertă (presiunea luminii), concluzia naturală este că această masă trebuie să se manifeste în acelaşi timp şi ca masă gravifică. Deci, în spectrele stelelor trebuie să se observe aşa-zisa deplasare spre roşu a liniilor spectrale.

Se cere să se calculeze valoarea deplasării relative a liniilor în spectrul Soarelui cînd Pămîntul se află la afeliu sau periheliu. Raza Soarelui este $R = 6{,}96 \cdot 10^8$ m, iar masa sa $M = 1{,}97 \cdot 10^{30}$ kg.

Constanta gravitaţională are valoarea $G = 6{,}6732 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg^{-2}.

3.13. Fotoelectronii emişi de un catod metalic al unei fotocelule, sub acţiunea unei radiaţii cu lungimea de undă $\lambda_1 = 1{,}36 \cdot 10^{-7}$ m, sînt frînaţi de o tensiune inversă între anodul şi catodul celulei $U_1 = 6$V; iar cei emişi de acelaşi catod, sub acţiunea radiaţiei de lungime de undă $\lambda_2 = 1{,}065 \cdot 10^{-7}$ m, sînt frînaţi de o tensiune inversă $U_2 = 8{,}53$ V.

Se cere să se calculeze:

a) constanta lui Planck;

b) energia necesară pentru extracţia unui electron din metalul catodului fotocelulei;

c) frecvenţa de prag proprie a catodului fotocelulei;

d) numărul de linii pe mm ale unei reţele de difracţie dacă radiaţia cu lungimea de undă $\lambda_1 = 1{,}36 \cdot 10^{-7}$ m este observată în spectrul de ordinul al doilea sub un unghi de 30°;

e) diferenţa de drum dintre două radiaţii cu lungimea de undă $\lambda_1 = 1{,}36 \cdot 10^{-7}$ m, pentru ca într-un punct de întîlnire al acestora să se formeze o bandă luminoasă.

3.14. Un fascicul de lumină monocromatică este divizat în două. Primul fascicul cade perpendicular pe o reţea de difracţie avînd $N = 500$ trăs./mm, al doilea cade pe o celulă fotoelectrică.

Să se determine:

a) lungimea de undă λ_1 dacă maximul de difracţie de ordinul 2 se obţine sub 30°,

b) numărul total de maxime de difracţie date de reţea pentru radiaţia $\lambda_2 = 4500$ Å.

c) Să se verifice valoarea constantei lui Planck, ştiind că pentru frînarea fotoelectronilor tensiunea aplicată este de 0,69 V pentru radiaţia $\lambda_2 = 4500$ Å şi de 0,415 pentru λ_1.

d) Care este energia cinetică W_c a fotoelectronilor emişi de celulă pentru $\lambda = 5000$ Å, dacă $E_{ex} = 2{,}3$ eV.

3.15. O sursă luminoasă emite lumină cu lungimea de undă $\lambda = 5000$ Å. Fasciculul luminos paralel emis, cade normal pe o reţea de difracţie.

Se cere:

a) numărul fotonilor incidenţi pe reţea în timp de 1 minut, dacă puterea sursei este $P = 20$ W;

b) constanta reţelei de difracţie, dacă maximul de difracţie de ordinul al doilea, se formează sub unghiul $\varphi = 30°$;

c) distanţa dintre maximul central (de ordinul zero) şi maximul de ordinul doi, pe un paravan pe care figura a fost proiectată cu ajutorul unei lentile, cu convergenţă $C = 2$ dioptrii.

d) Se înlocuieşte paravanul cu o celulă fotoelectrică de cesiu al cărui prag fotoelectric este $\lambda_0 = 6600$ Å.

Să se determine:
— lucrul de extracție,
— viteza cu care este emis un electron.

3.16. În cazul unui inel luminos Newton, s-a măsurat raza inelului r, raza de curbură a suprafeței convexe R, numărul de ordine k. Știind că la formarea inelului în timpul t au luat parte n fotoni, se cere puterea corespunzătoare celor n fotoni.

3.17. Să se calculeze frecvența unei radiații monocromatice a cărei putere este egală cu $3 \cdot 10^{-2}$ W, ceea ce corespunde la 10^{14} fotoni pe secundă.

Partea a doua

RELATIVITATEA

4. TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÎNSE

BREVIAR

Relativitatea restrînsă este teoria fizică în care se reformulează legile generale ale fenomenelor fizice în forma valabilă și la viteze relative foarte mari (comparabile cu viteza luminii $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) ale corpurilor, pentru care legile formulate în fizica clasică prerelativistă nu mai sînt confirmate de experiență. Astfel, teoria relativității restrînse formulează baza teoriilor fizice care vor fi în mod obligatoriu «relativiste», conservînd însă aspectul lor explicativ particular.

Teoria relativității restrînse se limitează la cazul sistemelor de referință*) în mișcare rectilinie uniformă unele în raport cu altele (sistemele de referință inerțiale**), limitare justificată de studiul fenomenelor pentru care influența gravitației este neglijabilă. De fapt, datorită acestei limitări, ea poartă numele de teoria relativității restrînse.

4.1. Relativitatea în fizica clasică

Conform principiului relativității newtoniene, adică, principiului relativității din fizica clasică, «toate legile mecanicii sînt invariante față de orice sistem de referință inerțial». Cu alte cuvinte, legile mecanicii au un caracter obiectiv și sînt independente față de sistemul de referință inerțial la care au fost raportate mărimile ale căror valori au fost măsurate.

*) Prin sistem de referință se înțelege în fizică un sistem de axe de coordonate la care este atașat un ceasornic. Astfel, față de un asemenea sistem de referință se dau coordonatele spațiale și timpul unui eveniment.

**) Un sistem de referință inerțial (referențial) este un sistem de referință în care este valabil principiul inerției.

Principiul relativității newtoniene este realizat de admiterea ca transformări cinematice a transformărilor Galileo Galilei. Transformările particulare ale lui Galileo Galilei dau relațiile între coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment la trecerea de la un sistem de referință inerțial la un alt sistem de referință inerțial, cînd acestea

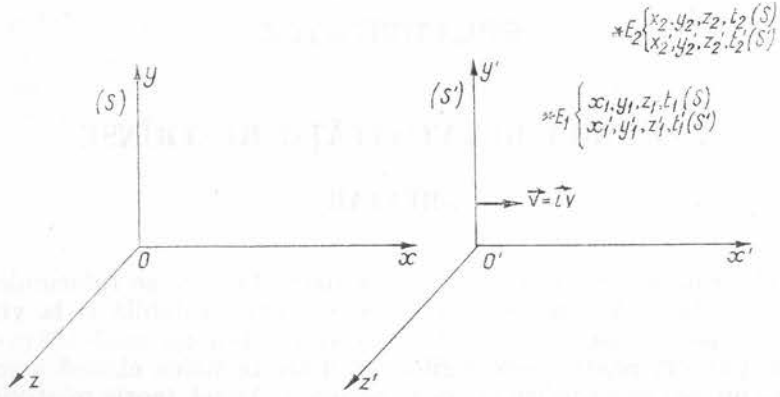


Fig. 1

se mișcă unul față de altul cu viteza relativă v îndreptată după una din axele de coordonate și axele de coordonate ale sistemelor de referință sînt respectiv paralele (fig. 1). Aceste relații sînt

$$x' = x - v\,t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

cînd se face trecerea de la coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) ale evenimentului M în sistemul de referință inerțial (S) la coordonatele spațio-temporale ale aceluiași eveniment în sistemul de referință inerțial (S'). Transformările inverse sînt date de expresiile

$$x = x' + v\,t, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{2}$$

În cazul unei mișcări uniforme a unui corp în (S'), de-a lungul axei $O'x'$, avem

$$x' = u't' \tag{3}$$

u' fiind viteza de deplasare a corpului în raport cu (S'). Același mobil va efectua, față de (S), o mișcare care ascultă de legea

$$x = u\,t \tag{4}$$

u fiind viteza de deplasare a aceluiași corp în raport cu (S). Ținînd seama de transformările Galileo Galilei, rezultă legea de compunere a vitezelor

$$u = u' + v \tag{5}$$

v fiind viteza de transport a lui (S') față de (S). Exprimînd pe u' în funcție de u, avem

$$u' = u - v. \tag{6}$$

În electromagnetism se arată că ecuațiile Maxwell-Lorentz, care reprezintă cel mai bine realitatea fizică a fenomenelor electromagnetice, sînt variante față de transformările Galileo Galilei.

Lucrurile prezentîndu-se astfel, s-au imaginat experiențe de electromagnetism (deci și de optică) care să determine mișcarea unui sistem de referință inerțial față de un alt referențial.

Experiențele efectuate (în speță, experiența Michelson și Morley) nu au reușit să pună în evidență mișcarea unui sistem de referință inerțial față de un alt sistem de referință inerțial. Ca atare, și legile electromagnetismului sînt invariante față de sistemele de referință inerțiale. Aceasta cere, însă, înlocuirea relațiilor de transformare a coordonatelor spațio-temporale ale lui Galileo Galilei cu altele.

4.2. Principiile generale ale teoriei relativității restrînse

a) *Principiul relativității restrînse* (*einsteiniene*) admite faptele experimentale obținute, conform cărora toate legile fizicii sînt aceleași în orice sistem de referință inerțial. Deci, ecuațiile matematice care exprimă legile naturii sînt invariante în raport cu anumite transformări de coordonate și de timp (generale față de transformările Galilei) cînd se trece de la un sistem de referință inerțial la altul.

b) *Principiul invarianței vitezei maxime de interacțiune.* Ținînd seama de faptele experimentale, teoria relativității restrînse admite ca principiu invarianța vitezei maxime de interacțiune. Conform acestui principiu : viteza maximă de transmisie a interacțiunilor este egală cu viteza luminii în vid și este invariantă în raport cu orice sistem de referință inerțial și cu orice direcție de măsurare.

c) *Principiul de corespondență.* Legile mecanicii fiind verificate experimental pentru viteze relative mici ($v \ll c$), este necesar să se considere și un principiu, care prin conținutul său este un principiu de metodică : legile fizicii clasice nerelativiste se obțin ca un caz par-

ticular al legilor fizicii clasice relativiste, pentru viteze relative mult mai mici decît viteza luminii. Acest principiu servește atît ca ghid în elaborarea noilor legi, cît și pentru verificarea acestora.

4.3. Simultaneitatea relativistă

În fizica clasică se admite existența simultaneității absolute, considerîndu-se un semnal cu viteza infinită pentru transmiterea interacțiunii.

Teoria relativității restrînse ține seama de faptul că experiența a arătat că viteza-semnal maximă este viteza luminii în vid. Conform teoriei relativității restrînse, determinarea efectivă a simultaneității nu poate avea loc decît printr-un schimb de semnale și, în particular, de semnale electromagnetice ca cele mai rapide și ca cele mai apte de a evita orice eroare importantă.

Simultaneitatea relativă definită într-un sistem de referință inerțial nu mai este conservată și în alt sistem de referință inerțial. Cu alte cuvinte, două evenimente simultane într-un sistem de referință inerțial nu sînt simultane și în celelalte sisteme de referință inerțiale.

4.4. Cinematica relativistă

a) *Transformările Lorentz.* Transformările Lorentz speciale dau legătura dintre coordonatele spațio-temporale x, y, z, t ale unui eveniment M (fig. 1) față de sistemul de referință (S) și coordonatele spațio-temporale x', y', z', t', ale aceluiași eveniment față de (S'), (S') avînd viteza de transport $\vec{v} = \vec{i}v$ față de (S). Acestea au forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{7}$$

Transformările inverse sînt

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y = y',\quad z = z',\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{8}$$

Se observă că pentru $v \ll c$, relațiile (7) și (8) se reduc la relațiile (1), respectiv (2).

b) *Consecințele transformărilor Lorentz.* 1°. *Contracția lungimilor (contracția Lorentz-Fitzgerald).* Între lungimea $\Delta x_0'$ *), măsurată în direcția axei $O'x'$, a unui corp imobil în raport cu un referențial (S') și lungimea Δx**) a aceluiași corp în raport cu un sistem (S), (S') mișcîndu-se față de (S) cu viteza $\vec{v} = \vec{i}v$, există relația

$$\Delta x_0' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{9}$$

2°. *Relativitatea simultaneității.* Dacă două evenimente (A) și (B) sînt simultane ($t_A = t_B$, $x_A \neq x_B$) în raport cu sistemul de referință inerțial (S), ele nu mai sînt simultane ($t_A' \neq t_B'$) în raport cu sistemul de referință inerțial (S'). Într-adevăr

$$t_A' - t_B' = \frac{t_A - \frac{v}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{t_B - \frac{v}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{v}{c^2}\,\frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0 \tag{10}$$

adică, t_A' fiind diferit de t_B', evenimentele A și B nu mai sînt simultane în (S').

3°. *Dilatarea relativistă einsteiniană a timpului.* Între durata $\Delta t'$***) a unui fenomen care se produce într-un punct care este fix în raport cu sistemul de referință (S') și durata Δt****) a aceluiași fenomen în raport cu sistemul (S), (S') avînd viteza relativă $\vec{v} = \vec{i}v$ față de (S) există relația

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{11}$$

4°. *Teorema relativistă a compunerii vitezelor.* Dacă un punct material se mișcă cu viteza $\vec{u}'$ de componente u_x', u_y', u_z' în raport cu (S'), (S') avînd viteza $\vec{v} = \vec{i}v$ față de (S), componentele $u_x, u_y,$

*) $\Delta x_0'$ poartă numele de lungime proprie a corpului care este în repaus față de sistemul de referință inerțial (S').

**) Δx poartă numele de lungime cinematică a corpului, care se află în mișcare față de referențialul (S) odată cu sistemul (S').

***) $\Delta t'$ — poartă numele de durată proprie.

****) Δt — poartă numele de durată cinematică.

u_z, ale vitezei $\vec{u}$ a aceluiaşi punct material în raport cu sistemul de referinţă inerţial (S) sînt date de expresiile

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v\,\dfrac{vu'_x}{c^2}},\quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}},\quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \tag{12}$$

iar transformările inverse

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}},\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}},\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}. \tag{13}$$

4.5. Dinamica relativistă

Dinamica relativistă formulează legile fenomenelor mecanice sub o formă invariantă faţă de transformările Lorentz. În cele ce urmează se dau cîteva rezultate ale dinamicii relativiste.

a) *Variaţia relativistă a masei.* Între masa de repaus m_0 a unui corp şi masa m, corespunzătoare corpului cînd acesta are viteza v, există relaţia

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}. \tag{14}$$

Astfel, legea fundamentală a dinamicii devine

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\right). \tag{15}$$

b) *Relaţia dintre energia şi masa unei particule libere.* Energia totală a unei particule libere este dată de expresia

$$E = mc^2. \tag{16}$$

Energia de repaus a unei particule libere se exprimă prin

$$E_0 = m_0 c^2. \tag{17}$$

Energia cinetică a particulei libere — în mişcare — va fi

$$E_c = E - E_0. \tag{18}$$

Între variaţia energiei ΔE a unei particule şi variaţia masei există relaţia

$$\Delta E = c^2\,\Delta m. \tag{19}$$

c) *Relaţia dintre energia totală E şi impulsul $\vec{p}$ al unei particule libere*

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{20}$$

d) *Particula cu masa de repaus nulă.* Dacă în (20), punem $m_0 = 0$, obţinem

$$E = pc \tag{21}$$

şi din

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{v}\frac{W}{c^2} \tag{22}$$

rezultă

$$v = c. \tag{23}$$

Particula care are tot timpul viteza egală cu viteza luminii poartă numele de foton.

Este ştiut că energia unui foton, relativă la frecvenţa sa ν, se exprimă prin relaţia lui Planck

$$E = h\nu \tag{24}$$

h fiind constanta lui Planck. Deci:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{25}$$

Relaţiile (24) şi (25) sînt relaţiile de legătură între mărimile care caracterizează aspectul corpuscular al radiaţiei (W, p) şi mărimile care caracterizează aspectul ondulatoriu al acesteia (ν, λ)

Concluzii

Teoria relativității restrînse elaborată de Einstein a adus o contribuție de bază la rezolvarea problemelor filozofice de bază ale fizicii moderne.

Fizica relativistă pune în evidență o serie de elemente absolute ca: viteza luminii c, valoarea absolută a intervalului spațiu-timp etc., mărimile de spațiu, timp, accelerație, energie, impuls ș.a., care în fizica clasică erau mărimi absolute devenind mărimi relative.

Legile fizicii apar atît ca legi obiective, cît și ca legi absolute (adică, independente de sistemele de referință inerțiale).

Verificările experimentale (dependența masei de viteză, întîrzierea ceasornicelor, relația masă-energie ș.a.) confirmă întrutotul rezultatele teoriei relativității restrînse.

* * *

4.1.1. Să se arate că în mecanica newtoniană duratele și distanțele sînt invarianți față de transformările Galilei.

4.1.2. Să se descrie experiența Michelson-Morley.

4.2.1. Ținînd seama de principiile teoriei relativității restrînse și de noțiunea de simultaneitate relativistă să se deducă transformările Lorentz speciale.

4.4.1. Să se demonstreze cu ajutorul transformărilor Lorentz că ordinea în timp a două evenimente care pot fi legate cauzal rămîne neschimbată (este invariantă) față de sistemele de referință inerțiale.

4.4.2. Să se arate că expresia

$$\Delta S^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

este un invariant în teoria relativității restrînse (adică față de transformările Lorentz).

4.4.3. Durata de viață a unei particule cu viteza $v = 0{,}99c$ este $\Delta t_0' = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s în sistemul propriu de referință. Care este distanța medie pe care o poate parcurge particula în aceste condiții? Care ar fi valoarea acestei distanțe dacă nu ar exista dilatarea relativistă a timpului?

4.4.4. O navă cosmică zboară spre steaua cea mai apropiată aflată la distanța $D = 4{,}3$ ani-lumină, cu viteza $v = 1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$; după ce ajunge la stea, nava se întoarce. Să se calculeze diferența de timp înregistrată de un observator aflat pe Pămînt și cea înregistrată de un observator de pe navă, la înapoierea navei pe Pămînt.

4.4.5. Să se arate că viteza luminii este aceeași în orice sistem de referință inerțial. (De fapt, este vorba de rezultatul experienței Michelson—Morley).

4.4.6. O bară, a cărei lungime în repaus este l_0, se mișcă uniform cu viteza v, astfel încît direcția ei face un unghi φ_0 cu direcția vitezei (fig. 4.4.6). Care este lungimea l a barei în sistemul față de care se mișcă. Cît este unghiul de înclinare față de aceste axe?

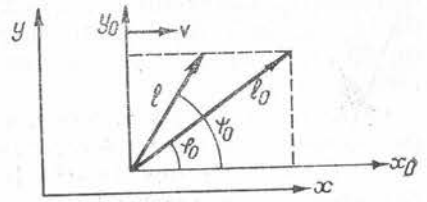


Fig. 4.4.6

4.4.7. a) Care este raportul între frecvența unei unde văzute dintr-un sistem de coordonate S', mobil față de sistemul S, în cazul cînd admitem că faza undei în cele două sisteme de coordonate trebuie să fie aceeași?

b) În ce raport se vor afla cele două frecvențe, dacă $\frac{v}{c} = 0{,}1$? Cît este în acest caz deviația relativă de frecvență? Mai este semnificativă această diferență dacă $\frac{v}{c} = 0{,}01$?

c) Cu ce viteză ar trebui să meargă un automobilist dacă, din cauza acestei deviații de frecvență, ar ajunge să confunde semnalul roșu de stop ($\lambda_r = 7000$ Å), cu cel verde ($\lambda_v = 5000$ Å)?

4.4.8. Un proton de energie cinetică $E_c = 25$ GeV traversează o galaxie al cărei diametru este 10^5 ani-lumină.

a) Să se calculeze timpul de traversare indicat de un ceas legat de proton.

b) Să se calculeze cantitatea de mișcare (impulsul) a acestui proton.

Se cunosc: viteza luminii $c \approx 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ și masa de repaus a protonului $M_0 \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg. De asemenea: $1\ \text{eV} = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ J.

4.4.9. Viața medie a unui mezon $\pi^{\pm}$ este $t_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ s. Cu mezoni $\pi^{\pm}$ de viteză $v = 0{,}99\ c$ ar trebui să se obțină parcursuri medii de $l_0 = 6$ m. Experimental se constată că parcursurile efective sînt net mai ridicate. Cum se explică acest rezultat?

4.4.10. Să se arate că rezultatul experienței lui Fizeau referitor la antrenarea parțială a „eterului" *) este, de fapt, un efect relativist.

---

*) În teoriile clasice (în special, în teoria lui Lorentz) asupra electromagnetismului se consideră că există o substanță numită — în mod ipotetic — „eter", ca suport al undelor electromagnetice.

4.4.11. Un fascicul de electroni este accelerat într-un tub catodic de un potențial de accelerare de 1000 V, fiind apoi deviat succesiv la trecerea printre plăcile a două condensatoare, montate perpendicular unul față de celălalt, cu plăcile paralele cu direcțiile fasciculului și aflate sub o diferență de potențial de 10 kV, respectiv 14 kV; primul condensator are între plăci o distanță de 20 mm, iar al doilea de 28 mm; lungimile plăcilor celor două condensatoare în direcția de mișcare a electronilor sînt de 20 mm, respectiv de 26 mm, distanțele de la marginile condensatoare pînă la ecranul tubului catodic fiind de 30 cm, respectiv 24 cm pentru cel de al doilea condensator. Se cere să se afle:

a) Care este viteza cu care electronii părăsesc electrodul de extracție (se consideră că viteza electronilor la ieșirea din filament este nulă)?

b) Cît este cîmpul electric de deviere transversală în cei doi condensatori, și ce accelerații transversale imprimă ei electronilor din fascicul?

c) Care sînt ecuațiile care descriu mișcarea electronilor în interiorul primului condensator?

d) Cît este deviația produsă la ieșirea din primul condensator (presupusă a se produce în planul vertical)?

e) Cît este deviația produsă pînă la ecran datorită numai primului condensator?

f) Dacă considerăm deviațiile produse de cîmpurile din cele două condensatoare ca independente una de cealaltă, cît este deviația totală produsă în planul orizontal de cel de al doilea condensator?

g) Ce s-ar întîmpla dacă tensiunea de accelerare ar fi 10^5V?

Se dau: masa electronului: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, sarcina electronului: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

4.5.1. Să se deducă relația dintre energia totală și masa unei particule libere relativiste cu masa de repaus m_0.

Pentru $v \ll c$ să se deducă expresia energiei cinetice a particulei libere.

4.5.2. Din relația care leagă energia de masa unei particule, $E = mc^2$, ținînd seama de faptul că impulsul particulei este $\vec{p} = m\vec{v}$, se cere să se obțină forma relativistă a relației dintre energia totală și impulsul particulei libere.

Să se calculeze energia totală a unui electron care se mișcă cu viteza $v = 3 \cdot 10^7$ m·s^{-1}, masa de repaus a electronului fiind $m_0 = 9{,}1091 \cdot 10^{-30}$ kg.

4.5.3. Să se determine viteza unui mezon dacă energia sa totală este de 10 ori mai mare decît energia de repaus.

Se cunoaște viteza luminii $c \approx 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

4.5.4. Ce diferență de potențial este necesară la accelerarea unui electron pentru ca viteza acestuia să devină 95% din viteza luminii?

4.5.5. O particulă cu masa de repaus m_{01} și viteza v_1 ciocnește o altă particulă cu masa de repaus m_{02} aflată în repaus, formînd o particulă complexă.

Să se determine masa m și viteza v a acestei particule complexe.

4.5.6. O particulă complexă, cu masa de repaus m_0, aflată în repaus, se dezintegrează spontan în două particule cu masele de repaus m_{01} și m_{02}. Să se determine energiile relativiste W_1 și W_2 ale acestor particule.

4.5.7. Să se determine durata Δt de viață a unei particule cu masa de repaus $m_0 = 1{,}88 \cdot 10^{-28}$ kg și energia $W = 10^9$ eV (în sistemul de referință mobil), dacă durata de viață a particulei în sistemul de referință propriu este $\Delta t_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s.

4.5.8. Să se calculeze raportul dintre masa de repaus m_0 și masa de mișcare m a unei particule relativiste, cînd se cunoaște:

a) energia totală W și impulsul p,

b) energia cinetică T și impulsul p.

4.5.9. Ce viteză capătă un electron cînd străbate o diferență de potențial $U = 10$ V într-un cîmp electric orientat după direcția de mișcare a electronului?

Dar cînd $U = 10^6$ V?

Se cunosc: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

4.5.10. Care este viteza cu care se deplasează un electron, dacă energia sa cinetică este cu 1% mai mare decît valoarea pe care ar avea-o dacă s-ar mișca din punct de vedere clasic?

4.5.11. Un nucleu de masă m inițial în repaus se dezintegrează în 2 fragmente nucleare de mase de repaus m_1 și m_2.

Presupunînd cunoscute masele m, m_1 și m_2 să se determine energiile relativiste ale celor două fragmente nucleare rezultante W_1 și W_2.

Aplicație numerică: $m = 237$ u $\approx 393 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_1 = 130$ u $\approx 216 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_2 = 107$ u $\approx 177 \cdot 10^{-27}$ kg.

4.5.12. Să se determine mișcarea unidimensională a unei particule cu masa de repaus m_0 sub acțiunea unei forțe constante F.

4.5.13. Un preparat radioactiv emite radiații β ale căror particule de energie maximă au o viteză de 0,9 c.

Care este energia cinetică a acestor particule?

4.5.14. Care este energia relativistă totală exprimată în eV a unui electron care într-un cîmp magnetic de 0,5 T descrie o traiectorie circulară de rază $r = 0{,}2$ m.

4.5.15. Reprezentarea unei reacţii nucleare în modelul lui Bohr.

a) O particulă de masă m_1 şi viteză v_1, comparabilă cu viteza luminii, ciocneşte o particulă de masă m_2, aflată în repaus. Cît este masa m şi viteza v a particulei complexe formate?

b) Particula complexă (nucleul compound) formată, se dezintegrează spontan în două particule de mase m_1 şi m_2, avînd viteze comparabile cu viteza luminii; să se determine energiile celor două particule formate.

4.5.16. În cazul efectului Compton relativist avem de a face cu ciocnirea între un electron, iniţial imobil şi un foton de energie $E_0 = h\nu_0$, viteza electronului de recul putînd deveni relativistă. Schema procesului fizic care are loc se dă în figura 4.5.16.

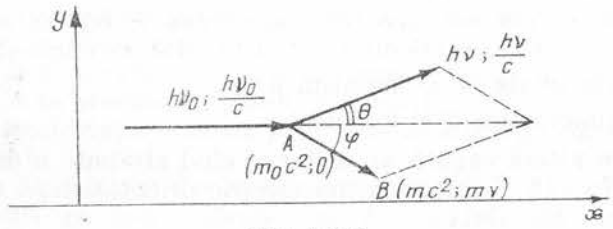


Fig. 4.5.16

a) Să se calculeze lungimea de undă a fotonului în urma ciocnirii cu electronul.

b) Să se calculeze energia electronului în urma ciocnirii foton-electron.

4.5.17. Să se calculeze valoarea constantei lui Planck, ştiind că un foton incident avînd lungimea de undă $\lambda = 0{,}11$ Å este difuzat de un electron sub unghiul $\varphi = 110°$, iar electronul de recul pleacă sub unghiul $\theta = 30°$ (fig. 4.5.17)?

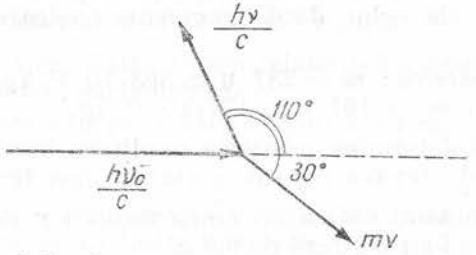


Fig. 4.5.17

Ce eroare se obţine?

4.5.18. Lungimea de undă a unei radiaţii γ incidente pe un radiator de parafină este de 0,497 Å; ştiind că fotonul este împrăştiat sub un unghi de 60°, 90°, respectiv 180°, ce energie primeşte în acest caz electronul care a interacţionat cu fotonul? (Pentru electron, se va lua: $m_0c^2 \approx 500$ keV).

4.5.19. Urma unui electron care se mişcă într-o cameră Wilson paralel cu planul orizontal se curbează la aplicarea unui cîmp magnetic transversal de 0,5 T, căpătînd o rază de curbură de 20 cm. Care au fost impulsul şi energia electronului a cărui traiectorie a fost astfel curbată?

4.5.20. Ce cîmp magnetic trebuie aplicat perpendicular pe planul figurii, pentru ca un fascicul de electroni accelerati la o tensiune de 1 MV, să treacă nedeviaţi printre plăcile condensatorului din figură,

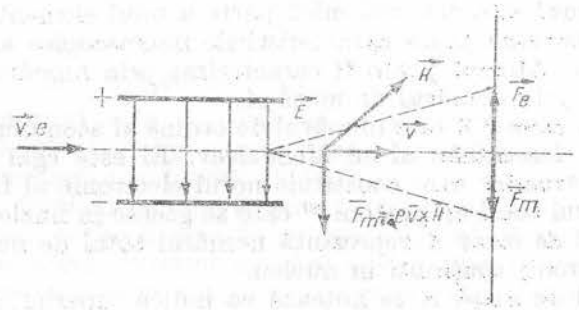


Fig. 4.5.20

dacă între aceste plăci există o distanţă de 5 cm şi se aplică o tensiune de 10 kV. (Se va ţine seamă de faptul că masa variază cu viteza; se va lua: $m_0c^2 = 0{,}5$ MeV).

Partea a treia

FIZICĂ ATOMICĂ

5. FIZICĂ ATOMICĂ

BREVIAR

5.1. **Atomul** este cea mai mică parte a unui element chimic pur care mai păstrează toate caracteristicile microscopice ale elementului respectiv. Atomul poate fi caracterizat prin numărul atomic Z, iar nucleul prin numărul de masă A.

Numărul atomic Z este numărul de ordine al atomului în sistemul periodic al elementelor al lui Mendeleev. El este egal cu numărul total al electronilor care constituie norul electronic al fiecărui atom și cu numărul total de protoni *) care se găsesc în nucleu.

Numărul de masă A reprezintă numărul total de nucleoni (protoni și neutroni) conținuți în nucleu.

Numărul de masă A se notează ca indice superior, iar numărul atomic Z ca indice inferior simbolului elementului considerat. De exemplu, izotopul 12 al carbonului ($A = 12$, $Z = 6$) se notează $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

Izotopi se numesc atomii aceluiași element, care au același număr atomic Z și deci aceleași proprietăți chimice (cele fizice fiind puțin diferite), însă numere atomice A diferite. Aceasta înseamnă că numărul de neutroni conținuți în nucleul ($A - Z$) este diferit, numărul de protoni și electroni fiind însă identic.

Masa atomică a unui atom este determinată de numărul de neutroni și protoni care se găsesc în nucleu, masa electronilor care constituie norul electronic al atomului fiind neglijabilă în raport cu masa nucleului. Masa atomică se determină experimental cu ajutorul spectrometrelor de masă, folosind în acest scop deviațiile ionilor în cîmpuri electrice și magnetice. Masa atomică A se exprimă în unități atomice de masă.

*) Asupra principalelor caracteristici ale nucleonilor (neutroni și protoni) v. capitolul de fizică nucleară.

Unitatea atomică de masă (u) în scara fizică, este prin definiție a douăsprezecea parte din masa izotopului $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

$$1\ \mathrm{u} = \frac{1}{12}\, m\,^{12}_{6}\mathrm{C} \approx \frac{1}{6{,}022 \cdot 10^{26}} \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}. \qquad (1)$$

De multe ori este necesar să se considere cantități de substanță care să conțină întotdeauna același număr de molecule. Unitatea SI pentru această cantitate de substanță este kilomolul.

Kilomolul este cantitatea de substanță, a cărei masă exprimată în kg este numeric egală cu masa moleculară a substanței exprimată în unități atomice de masă.

Numărul lui Avogadro este numărul de molecule conținut într-un kilomol de substanță, care este același pentru orice substanță. El se poate afla împărțind masa unui kilomol M la masa unei molecule m a substanței, ceea ce pentru hidrogen, de exemplu, ne dă

$$\mathcal{N} = \frac{M}{m} = \frac{2\ \mathrm{kg}}{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} \approx 6{,}022 \cdot 10^{26}\ \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}. \qquad (2)$$

5.2. **Electronul** este o particulă elementară avînd masa de repaus $m \approx 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg și o sarcină electrică negativă, egală cu sarcina elementară $e \approx 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C.

Deviația fasciculelor de electroni (raze catodice) în cîmpurile electrice și magnetice a pus în evidență faptul că sarcina electronului este negativă. Studiul mișcării electronilor în cîmpurile electrice și magnetice a permis apoi măsurarea sarcinii elementare (experiența lui Millikan), a sarcinii specifice e/m (și deci a masei electronului), în funcție de datele experimentale concrete.

5.3. **Deviația electronului într-un cîmp electric transversal** se studiază în mod analog cu aruncarea unui corp cu o viteză inițială în cîmpul gravitațional. Din fig. 1 rezultă că electronul se mișcă

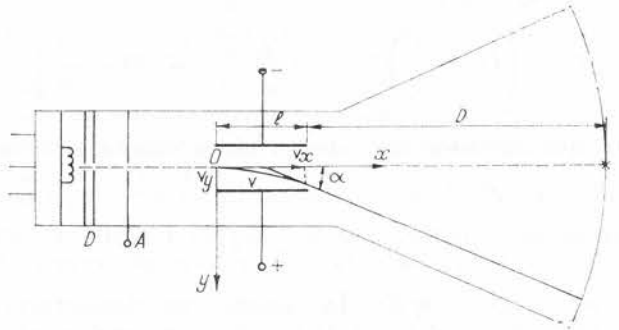


Fig. 1

rectiliniu și uniform după Ox, cu viteza $v = v_x = \text{const.}$ și are o mișcare uniform accelerată, cu accelerația constantă

$$a_y = \frac{e}{m} E = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \tag{4}$$

în lungul axei Oy, coliniară cu cîmpul electric transversal.

U este tensiunea aplicată pe plăcile de deflecție ale condensatorului de lungime l, dispuse la distanța d una de alta. Rezultă viteza

$$v_y = a_y t = \frac{e}{m} \frac{U}{d} t = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \frac{l}{v} \tag{5}$$

și unghiul de deviație α la ieșirea din condensator

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \frac{l}{v^2}. \tag{6}$$

Dacă considerăm $x = vt$ și eliminăm timpul în ecuația de mișcare după axa Oy, atunci obținem

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{U}{d} \frac{e}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{U}{d} \frac{e}{m} \frac{x^2}{v^2} \tag{8}$$

adică expresia unei parabole cu vîrful în originea axelor de coordonate.

Deviația δ_e a fasciculului este (v. problema 5.3.3)

$$\delta_e = \left(D + \frac{l}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \frac{l}{v^2} \left(D + \frac{l}{2}\right).$$

5.4. Deviația electronului într-un cîmp magnetic transversal

Se consideră un electron cu viteza inițială $v = v_x$ care pătrunde într-un cîmp de inducție magnetică $\vec{B}$ perpendicular pe direcția vitezei inițiale (fig. 2). Forța Lorentz care acționează asupra electronului este $F = e|\vec{v} \times \vec{B}| = evB$. În acest caz traiectoria este un arc de cerc de rază r conținut într-un plan perpendicular pe direcția

lui $\vec{B}$ (planul xOz). Mărimea razei de curbură se determină din egalarea forței Lorentz cu forța centrifugă

$$evB = \frac{mv^2}{r} \tag{9}$$

$$r = \frac{1}{e/m} \frac{v}{B}; \tag{10}$$

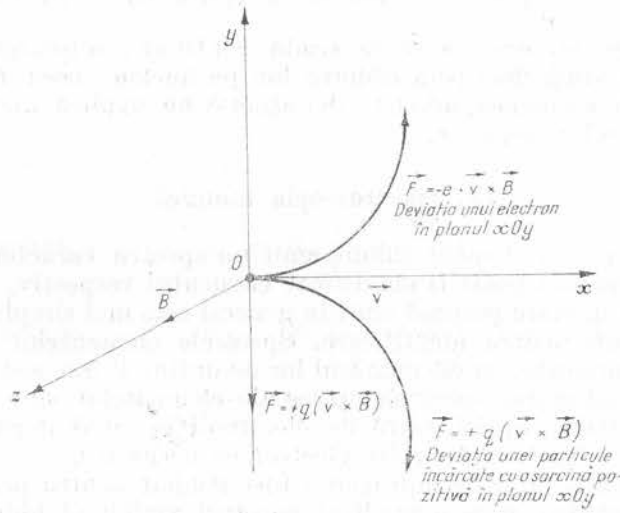


Fig. 2

Energia cîștigată de un electron accelerat într-un cîmp electric, ca și alte energii care intervin în fizica atomică (energia unui nivel, energia de ionizare etc.) se exprimă de obicei în electronvolți și multiplii acestora.

Electronvoltul este definit ca energia pe care o obține un electron care se mișcă sub acțiunea unui cîmp electric exterior între două puncte ale acestui cîmp între care există o diferență de potențial de un volt

$$1 \text{ eV} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^3 \text{ keV} = 10^6 \text{ eV} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

5.5. Atomul lui Rutherford

Primul model atomic bazat pe rezultate experimentale este modelul planetar al lui E. Rutherford (1911), conform căruia electronii se mișcă în jurul nucleului analog planetelor în jurul Soarelui. Experiențele care au condus la acest model atomic se bazează pe studiul difuziei unui fascicul de raze α care străbate foițe de aur foarte subțiri. Conform legilor clasice ale electrodinamicii, electronii mișcîndu-se pe orbite circulare și avînd o accelerație centripetă $a = \frac{v^2}{r}$, atomul trebuie să emită continuu unde electromagnetice, iar energia sa să scadă continuu; mișcarea acestor electroni va sfîrși deci prin căderea lor pe nucleu, ceea ce nu se întîmplă. De asemenea, acest model atomic nu explică nici producerea spectrelor atomice.

5.6. Spectroscopia atomică

Atomii fiecărui element chimic emit un spectru caracteristic de radiații, după care poate fi identificat elementul respectiv. Elementele chimice în stare gazoasă emit în general cele mai simple spectre de linii folosite pentru identificare. Spectrele elementelor sînt cu atît mai complicate, cu cît numărul lor de ordine Z din sistemul periodic este mai mare. Spectrele optice ale elementelor sînt determinate de electronii optici, adică de electronii cei mai depărtați de nucleu, care se găsesc pe orbite electronice periferice.

Spectrul atomului de hidrogen a fost studiat pentru prima dată de Balmer (1885), care a analizat spectrul vizibil al hidrogenului monoatomic aflat în stare gazoasă, într-un tub de descărcări electrice în gaze. Pentru liniile monocromatice de emisie ale hidrogenului a fost stabilită următoarea formulă empirică

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2 - 2^2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots. \tag{11}$$

unde B este o constantă care are dimensiunea unei lungimi. Rydberg scrie relația care exprimă seria Balmer sub forma

$$\nu_{2n} = R_H\, c\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right] \tag{12}$$

unde R_H este o constantă, numită constanta lui Rydberg pentru

atomul de hidrogen. Această relație se poate scrie mai simplu utilizînd în locul frecvenței ν_{2n}, numărul de undă

$$\tilde{\nu}_{2n} = R_H\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right] \tag{13}$$

unde *numărul de undă* $\tilde{\nu}$ este prin definiție numărul de lungimi de undă λ_0 în vid, cuprinse în unitatea de lungime și se măsoară în m^{-1}

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c}. \tag{14}$$

Pe lîngă spectrul vizibil al atomului de hidrogen, au mai fost descoperite ulterior și alte serii spectrale ale acestui element, descrise prin formule asemănătoare:

Seria Lyman în U.V. $\tilde{\nu}_{1m} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right)$; $m = 2, 3, 4, \ldots$ (15)

Seria Paschen $\tilde{\nu}_{3p} = R_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{p^2}\right)$; $p = 4, 5, 6, \ldots$ (16)

Seria Brackett $\tilde{\nu}_{4q} = R_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{q^2}\right)$; $q = 5, 6, 7, \ldots$ (17)

Seria Pfund $\tilde{\nu}_{5r} = R_H\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{r^2}\right)$; $r = 6, 7, 8, \ldots$ (18)

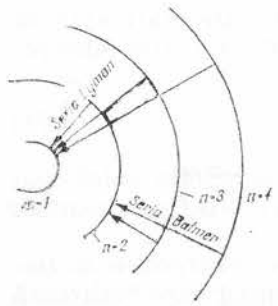


Fig. 3

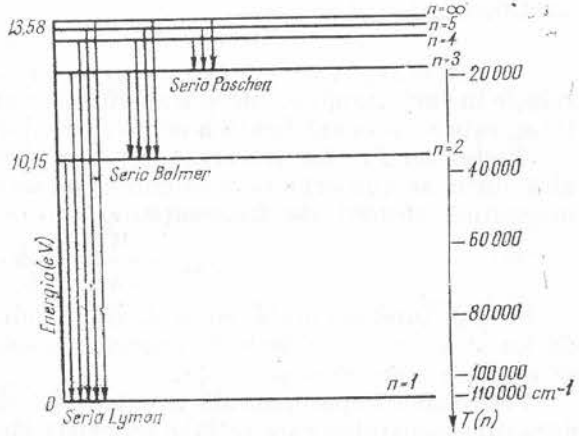


Fig. 4

ultimele 3 serii spectrale fiind situate în domeniul infraroşu al spectrului. Seriile spectrale ale atomului de hidrogen pot fi descrise printr-o relaţie generală de forma (v. fig. 3 şi 4)

$$\tilde{\nu}_{ab} = R_H\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{R_H}{a^2} - \frac{R_H}{b^2} = T(a) - T(b) \qquad (19)$$

în care $T(a)$ şi $T(b)$ se numesc *termeni spectrali*. Relaţia (19) exprimă principiul de combinare al lui Ritz, conform căruia numărul de undă $\tilde{\nu}$ este dat de diferenţa a 2 termeni spectrali. Acest principiu de combinare nu poate fi explicat de fizica clasică.

5.7. Postulatele lui Bohr

Pentru a avea posibilitatea de a explica rezultatele privind spectrele atomului de hidrogen N. Bohr (1913) postulează existenţa modelului atomic al lui Rutherford prin următoarele două postulate :

Postulatul I. Electronii se pot mişca în jurul nucleului numai pe anumite orbite circulare cuantificate stabile, denumite orbite staţionare (conform fizicii clasice este posibilă mişcarea electronilor pe orice orbită).

Mişcarea electronilor pe aceste orbite se face însă fără ca energia acestora să varieze.

Aceste orbite corespund unor stări de energie cuantificate ale atomului, care formează un şir discret de valori W_1, W_2, W_3... În cazul cînd electronul este liber (nelegat în atom), acestui spectru îi corespunde un spectru continuu de energii.

Orbitele staţionare cuantificate sînt acele orbite pentru care momentul cinetic L este un multiplu întreg al constantei lui Planck „raţionalizate" $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$L = |\vec{r}_n \times m\vec{v}| = mvr_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (20)$$

relaţie în care numărul întreg n se numeşte *numărul cuantic principal*, iar r_n este raza cuantificată a orbitei circulare.

Postulatul II. La trecerea atomului dintr-o stare staţionară în altă stare, se absoarbe (sau se emite) o cuantă de radiaţie electromagnetică (foton) de frecvenţă ν_{mn}

$$\nu_{mn} = \frac{W_n}{h} - \frac{W_m}{h}. \qquad (21)$$

Starea fundamentală corespunde nivelului energetic celui mai de jos al atomului. Stările de energie superioare stării fundamentale se numesc stări excitate.

Verificarea experimentală a existenţei stărilor energetice staţionare din atom între care se face tranziţia electronilor care realizează emisia sau absorbţia unei cuante de energie electromagnetică (foton)

$\varepsilon = h\nu_{mn}$, conform postulatului II al lui Bohr, s-a făcut prin experienţele lui J. Frank şi G. Hertz (1913).

Expresia energiei cuantificate a atomului de hidrogen în starea staţionară de număr cuantic n este

$$W_n = -\frac{1}{n^2}\frac{e^4 m}{8h^2\varepsilon_0^2}, \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (22)$$

unde ε_0 reprezintă permitivitatea vidului.

Reprezentarea nivelelor energetice posibile ale unui atom de hidrogen este dată în fig. 4. Introducînd relaţia (22) în expresia (21) a postulatului II, obţinem

$$\nu_{mn} = \frac{W_n - W_m}{h} = \frac{e^4 m}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (23)$$

Se arată (v. problema 5.7.3) că raza orbitei circulare a unui electron depinde de numărul cuantic principal prin relaţia

$$r_n = n^2\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi e^2 m}. \qquad (24)$$

Ansamblul orbitelor cu acelaşi număr cuantic principal n se numeşte *pătură*.

Pătura cea mai apropiată de nucleu este pătura cu numărul $n = 1$, denumită pătura K, şi pe care electronii au o energie minimă. Celelalte pături avînd $n=2, 3, 4, \ldots$ se numesc, în ordine, păturile $L, M, N, \ldots$.

Serie spectrală se numeşte totalitatea liniilor spectrale care pot lua naştere la tranziţia unui electron de pe un nivel oarecare m, pe orice alt nivel n.

5.8. Atomul lui Sommerfeld

Teoria lui Bohr a fost dezvoltată de A. Sommerfeld (1916).

Condiţiile de cuantificare ale lui Sommerfeld sînt

$$\oint p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi h$$
$$\oint p_r \, dr = n_r h \qquad (25)^*$$

* Cea mai generală expresie a condiţiei de cuantificare Sommerfeld este :

$$\oint p_q \, dq = n_q h, \qquad (25')$$

unde impulsul generalizat p_q asociat coordonatei generalizate q şi vitezei generalizate $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ a unui sistem fizic cu energia cinetică W_c este :

$$p_q = \left(\frac{dW_c}{d\dot{q}}\right)_{v=\text{const.}} = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{q}}, \qquad (25'')$$

unde (după cum este indicat) derivarea (parţială) este efectuată pentru valori constante ale tuturor variabilelor v (diferite de $\dot{q}$) de care depinde W_c.

unde p_φ și p_r sînt impulsurile generalizate corespunzătoare variabilelor φ și r (v. fig. 5).

În felul acesta se ajunge la concluzia că mișcările electronului în jurul nucleului se fac după acele orbite care satisfac relației

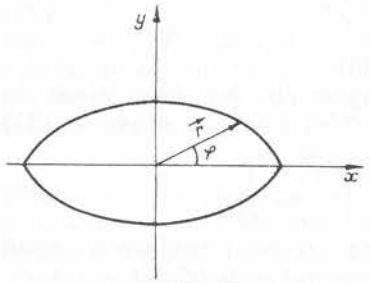


Fig. 5

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{n_\varphi}{n_\varphi + n_r} = \frac{n_\varphi}{n} \qquad (26)$$

unde a și b sînt valorile semiaxelor elipsei, ε excentricitatea ei, n_φ numărul cuantic azimutal și n_r numărul cuantic radial, care pentru o anumită valoare a numărului cuantic principal n pot lua numai una din următoarele valori discrete

$$n_\varphi = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$
$$n_r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1).$$

Deci, pentru același număr cuantic principal n (adică pentru aceeași energie W_n), sînt posibile n orbite diferite într-un plan pentru a descrie mișcarea electronului în jurul nucleului (se spune că avem o „degenerescență" de ordinul n).

În concluzie, modelul lui Sommerfeld menține și orbitele circulare ale lui Bohr, determinate de numărul cuantic principal n, dar le adaugă, ca fiind posibile, încă $(n-1)$ orbite eliptice diferite.

5.9. Proprietăți cinematice și magnetice ale electronului

Mișcarea electronului pe o orbită închisă în jurul nucleului este echivalentă unui curent electric închis, căruia îi corespunde un moment magnetic orbital (v. problema 5.9.1). Momentul magnetic*) orbital al electronului pe prima orbită a fost calculat de Procopiu (1912) și Bohr (1913) și are valoarea constantă (magneton Bohr)

$$\mu_B = \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m} \approx 9{,}28\cdot 10^{-24}\ \text{J/T}. \qquad (27)$$

Studierea liniilor spectrale cu ajutorul aparatelor spectrale cu o putere mare de rezoluție a demonstrat că aceste linii spectrale sînt

*) Energia de interacțiune W_m dintre un sistem fizic (eventual particulă) cu proprietăți magnetice și un cîmp magnetic omogen de inducție $\vec{B}$, respectiv momentul $\vec{M}$ al cuplului acționînd — în condițiile citate — asupra sistemului, sînt date de relațiile: $W_m = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, $\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}$, unde $\vec{\mu}$ este *momentul magnetic* al sistemului (particulei); în cazul particular al unui conductor închis (delimitînd suprafața Σ, de arie A) parcurs de un curent electric de intensitate I, avem: $\vec{\mu} = IA\cdot\vec{1}_\Sigma$, unde $\vec{1}_\Sigma$ este vectorul unitar al normalei la suprafața Σ.

alcătuite în realitate din mai multe componente, adică au o așa numită „structură fină". Explicarea dată existenței acestei structuri fine se bazează pe interpretarea unor proprietăți cinematice și magnetice proprii ale electronilor, caracterizate prin momentul cinetic propriu $\vec{S}$ și momentul magnetic $\vec{\mu}_s$. Se arată că proiecțiile acestor momente proprii pe o axă sînt cuantificate și au numai cîte două valori posibile

$$\text{pr}\,\vec{S} = m_s\hbar, \qquad \text{pr}\,\vec{\mu}_s = 2\,m_s\,\mu_B \qquad (28)$$

unde m_s este *numărul cuantic magnetic de spin*, care poate avea numai două valori discrete: $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

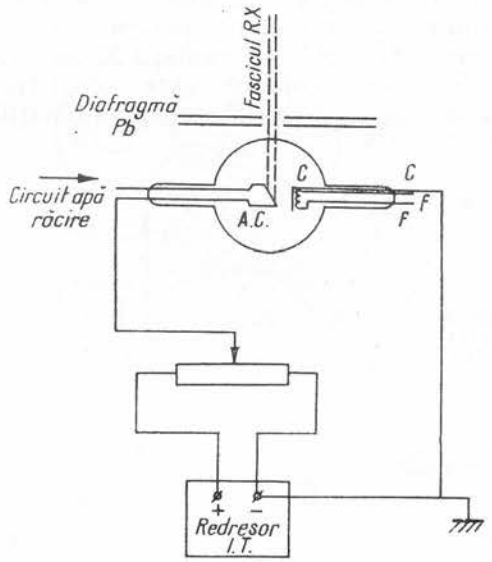


Fig. 6

5.10. **Spectrele de radiații X** pot fi produse în tuburi de raze X (fig. 6). Fasciculul de electroni emis de catod este acționat către electrodul opus — „anticatodul", adică de către cîmpul electric produs de o tensiune înaltă convenabilă, aplicată între catod și anticatod. Acești electroni suferă o frînare prin ciocnirea cu atomii anticatodului; datorită energiei mari dobîndite de electronii emiși de catod, în urma procesului de accelerare în cîmpul electric, în momentul în care electronii ajung la anticatod, această energie poate fi transmisă prin procese de ciocnire anumitor atomi ai anticatodului. Electronii

acestor atomi ai anticatodului, avînd energii de legătură în atomi dintre cele mai mari, pot executa tranziții spre nivelele de energie cele mai îndepărtate de nucleu. Revenirea acestor electroni ai atomilor pe nivelele de energie cele mai apropiate de nucleu are drept rezultat emiterea radiațiilor X. Spectrele de raze X sînt constituite dintr-un spectru continuu și un spectru de linii discret. Spectrul continuu este limitat spre frecvențele mari (lungimi de undă mici) de către o frecvență maximă determinată de tensiunea U stabilită între anod și catod $\nu_{max} = \frac{eU}{h}$ și este produs prin frînarea electronilor în metalul anodului. Acest spectru continuu este denumit în literatura de specialitate „bremsstrahlung", adică „radiație de frînare". Experimental s-a constatat că fiecare metal care constituie anticatodul emite un anumit spectru discret de raze X, care îl poate caracteriza. Spectrele de radiații X caracteristice prezintă proprietăți specifice ale atomilor care constituie anticatodul; ele nu se schimbă odată cu modificarea combinațiilor chimice din care fac parte.

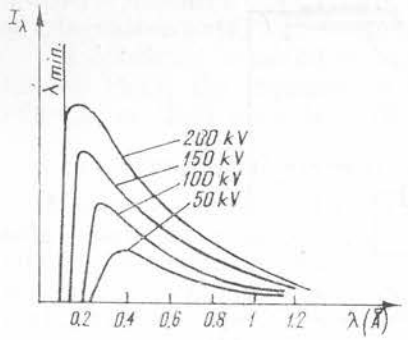


Fig. 7

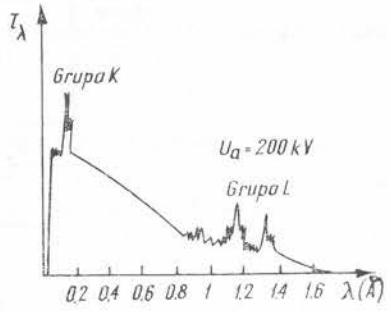


Fig. 8

În fig. 7 este reprezentată intensitatea radiațiilor X de frînare $I = f(\lambda)$, determinată teoretic pentru diferite tensiuni de accelerare U_a aplicate pe anticatodul tubului de raze X (în cazul de față din wolfram), în funcție de lungimea de undă λ a radiațiilor X emise. Pentru comparație, în fig. 8 este reprezentat același spectru al radiațiilor emise de anticatodul de wolfram, de data aceasta determinat experimental; se observă în acest spectru apariția spectrului X discret de linii caracteristice ale wolframului.

Tranzițiile electronilor de pe păturile mai îndepărtate pe păturile K dau naștere seriei spectrale de emisie K, de pe păturile exterioare pe

păturile L a seriei L etc. H. Moseley (1913) stabilește empiric o relație, care arată că rădăcina pătrată a frecvenței unei linii dintr-o serie spectrală depinde liniar de numărul atomic Z al elementului (fig. 10)

$$\sqrt{\nu_{mn}} = \sqrt{a}\,(Z - b) \tag{29}$$

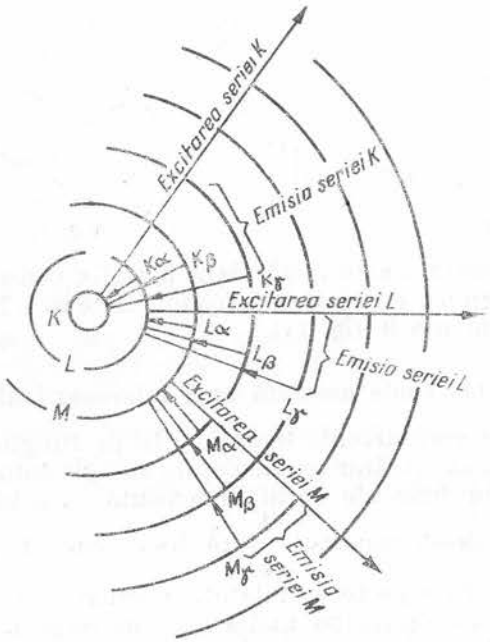


Fig. 9

unde a și b sînt parametri caracteristici respectivei serii spectrale. Cunoscînd valorile acestor parametri, se poate determina experimental numărul atomic Z al unui atom. S-a arătat că se poate scrie relația

$$a = Rc\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{30}$$

și deci

$$\nu_{mn} = Rc\,(Z - b)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{31}$$

Radiaţiile X produc fenomene ondulatorii caracteristice, ca şi toate celelalte unde electromagnetice. În particular, pentru cazul difracţiei pe cristale se verifică relaţia lui Bragg

$$2\,d\,\sin\theta = K\,\lambda, \quad K = 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{32}$$

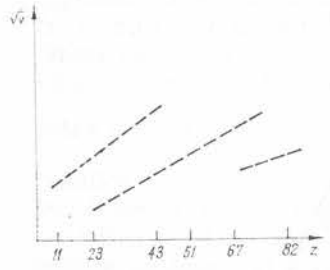


Fig. 10

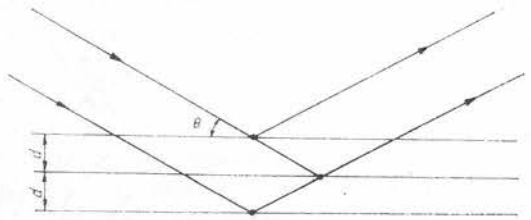


Fig. 11

unde d este distanţa dintre două plane atomice consecutive ale cristalului şi λ lungimea de undă a fasciculului de raze X care vine sub un unghi de incidenţă θ (fig. 11).

5.11. Unda asociată unei microparticule

În baza unor considerente teoretice, L. de Broglie (1924) a emis ipoteza că evoluţia oricăror particule, de energie totală W şi impuls p, într-un spaţiu fizic ale cărui dimensiuni caracteristice nu sînt mult mai mari decît raportul $\frac{h}{p}$ (h fiind constanta lui Planck), trebuie să prezinte aspecte ondulatorii pregnante, frecvenţa şi lungimea de undă corespunzînd undei asociate respectivelor particule, fiind date, conform, ipotezei de Broglie (v. şi capitolul de optică fotonică, pentru mărimile caracteristice fotonului) de relaţiile:

$$\nu = \frac{W}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p};$$

ipoteza lui L. de Broglie a fost confirmată (calitativ şi cantitativ), prin experienţele de difracţie a fasciculelor de electroni, efectutate de Davisson şi Germer (1927).

5.12. Numere cuantice

Modelele atomice ale lui Bohr şi Sommerfeld, bazate pe existenţa orbitelor electronice cuantificate, constituie mecanica cuantică veche. Aceste teorii sînt suficiente pentru explicarea corectă a spectrelor atomilor complecşi şi a sistemului periodic al elementelor.

Mecanica cuantică actuală renunţă însă la ipoteza mişcării electronilor pe anumite orbite electronice cuantificate, considerînd că electronii se găsesc în jurul nucleului, formînd norul electronic al acestuia.

Conform ipotezei lui Louis de Broglie, fiecărui electron aflat în mişcare în jurul nucleului i se asociază o undă descrisă printr-o funcţie de undă ψ, care depinde de coordonate şi de timp. Semnificaţia fizică a acestei funcţii de undă rezultă din postulatul interpretativ al lui Max Born, care arată că pătratul modulului acestei funcţii este: $|\psi|^2 = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}$, unde ΔP reprezintă probabilitatea elementară de a găsi electronul într-un element de volum ΔV din spaţiu. Electronul care se mişcă în jurul nucleului este descris deci de funcţia de undă ψ, asociată acestuia. Găsirea expresiei funcţiei de undă este una din problemele de bază ale mecanicii cuantice. Ecuaţia care permite calculul acestei funcţii de undă ψ în stările staţionare este ecuaţia lui Schrödinger, care are forma *)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - U)\psi = 0 \tag{34}$$

unde U este energia potenţială a electronului în cîmpul nucleului, iar W energia lui totală.

Principala concluzie care se deduce din rezolvarea ecuaţiei lui Schrödinger pentru cazul electronului care se mişcă în cîmpul de forţe centrale de atracţie al unui nucleu este următoarea:

Starea unui electron este caracterizată prin patru numere cuantice (n, l, m_l, m_s)**).

Numărul cuantic principal n determină energia totală a atomului.

*) Rezolvarea ec. (34) este asemănătoare cu rezolvarea ecuaţiei unei corzi vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{35}$$

y fiind elongaţia punctului care vibrează, de abscisă x şi u viteza de propagare a oscilaţiilor în coardă. Datorită condiţiilor la limită impuse pentru cele două puncte extreme ale corzii, soluţia acestei ecuaţii (36) are numai anumite soluţii discrete, corespunzătoare numai unor anumite frecvenţe proprii ale undelor staţionare care pot lua naştere într-o coardă vibrantă (v. problema 3.12.1).

În mod analog funcţia ψ, soluţie a ecuaţiei Schrödinger (34), are în anumite cazuri valori cuantificate (discrete).

**) Cuantificarea proiecţiilor momentelor cinetice şi magnetice de spin ale electronilor prin *numărul cuantic magnetic de spin* m_s [v. relaţiile (28)] rezultă — de fapt — din teoria cuantică (specială) a spinului electronic (W. Pauli, P. A. M. Dirac), teorie bazată pe rezultatele experienţelor Einstein-de Haas şi Stern-Gerlach.

Luînd în considerație numai interacțiunea coulombiană dintre electron și nucleu, se obțin din ecuația Schrödinger (34) valori ale energiei totale a atomului de hidrogen care coincid cu cele date de teoria lui Bohr [relația (25)]. Valorile posibile ale lui n sînt : $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Numărul cuantic orbital l determină valoarea cuantificată a momentului cinetic orbital, dat de relația

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \text{ cu } l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{36}$$

Numărul cuantic orbital l determină subpătura electronică, pentru un același număr cuantic principal n. În spectroscopie se introduc notațiile :

Valoarea nr. cuantic principal n	1	2		3	4		
Denumirea păturii electronice	K	L		M	N		
Valoarea nr. cuantic orbital l	0	0	1	0 1 2	0	1	2 3
Denumirea subpăturii electronice	s	s	p	$s\ p\ d$	s	p	$d\ f$

Numărul cuantic magnetic m_l determină cuantificarea energiei suplimentare de interacție a electronului în cîmpul magnetic B

$$\Delta W = -m_l \cdot \mu_B \cdot B. \tag{37}$$

Totodată sînt cuantificate prin m_l și valorile proiecțiilor momentului cinetic orbital $\vec{L}$ și magnetic orbital $\vec{\mu}_l$

$$\text{pr}\,\vec{L} = m_l \cdot \hbar$$

$$\text{pr}\,\vec{\mu}_l = m_l \cdot \mu_B$$

$$(m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm l) \tag{38}$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots (n-1). \tag{39}$$

Principiul de excluziune al lui W. Pauli : în același atom nu pot exista doi (sau mai mulți) electroni care să aibă toate numerele cuantice (n, l, m_l, m_s) egale, adică să se găsească în aceeași stare.

5.13. Atomi cu mai mulți electroni

În acest caz, electronii de pe păturile inferioare constituie un ecran pentru sarcina electrică $+Ze$ a nucleului. În acest caz energia electronilor nu mai corespunde cu relația (22) dată de teoria lui Bohr. Electronii de pe aceeași pătură electronică n nu mai au aceeași energie, căci energia lor depinde în acest caz de ambele numere cuantice n și l.

Așezarea electronilor în atomi se face în ordinea creșterii energiei subpăturii.

Proprietățile chimice ale atomilor sînt determinate de electronii de pe pătura exterioară, denumiți și electroni de valență. De aici periodicitatea proprietăților chimice ale elementelor, care este determinată de periodicitatea numărului de electroni de pe pătura exterioară. Spectrele optice ale elementelor din domeniul radiațiilor vizibile și ultraviolet ne dau informații asupra nivelelor energetice ale electronilor exteriori, în timp ce spectrele de radiații X ne dau informații asupra nivelelor energetice ale electronilor celor mai apropiați de nucleu. Din acest motiv spectrele optice din domeniul vizibil sau ultraviolet ale elementelor din aceeași grupă a sistemului periodic al lui Mendeleev sînt asemănătoare.

* * *

5.1.1. Legea lui Avogadro enunțată în 1881 arată că volume egale din orice element chimic în stare gazoasă, luate în aceleași condiții de temperatură și presiune, conțin un număr egal de molecule.

a) Să se arate că volumul ocupat de un kilomol de gaz în condiții identice de temperatură și presiune este constant.

b) Calculați volumul ocupat de un kilomol de hidrogen molecular în condiții normale de temperatură și presiune, știind că masa atomică a hidrogenului $m_H = 1{,}008$, densitatea relativă a hidrogenului în raport cu aerul $d = 0{,}0695$ și masa unui litru de aer $\mu_a = 1{,}293$ g.

c) Știind că numărul lui Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}022 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}, să se calculeze numărul de molecule dintr-un m^3 de gaz în condiții normale de temperatură și presiune (numărul lui Loschmidt).

5.1.2. Se știe că un monocristal de clorură de sodiu poate fi considerat că se compune din celule identice de formă cubică, avînd în fiecare vîrf al cubului un ion identic, astfel încît fiecare celulă elementară conține 4 ioni identici.

Măsurători de difracție de raze X au condus la concluzia experimentală că latura unei astfel de celule cubice elementare este $l = 5{,}6$Å.

Știind că densitatea cristalului de clorură de sodiu este $d = 2{,}2 \cdot 10^3$ kg/m^3 și că masa atomică a clorului este 35,5, iar masa atomică a sodiului este 23, să se calculeze numărul lui Avogadro.

5.1.3. Clorul are doi izotopi stabili $^{35}_{17}Cl$ și $^{37}_{17}Cl$.

a) Care este numărul de electroni, protoni și neutroni pentru fiecare izotop?

b) Știind că masa atomică a clorului este 35,457 să se calculeze proporția celor doi izotopi în amestec natural.

c) Știind că hidrogenul are 2 izotopi stabili ($^{1}_{1}H$ și $^{2}_{1}H$) cîte varietăți de molecule de acid clorhidric există?

5.2.1. Pentru a măsura valoarea sarcinii electrice a electronului se folosește dispozitivul lui Millikan. Între plăcile unui condensator plan se aplică o tensiune constantă U, care creează un cîmp electric omogen în care pătrunde o picătură de ulei electrizată în prealabil prin frecare. Cîmpul electric își poate schimba sensul cu ajutorul unui comutator, schimbîndu-se astfel și sensul de mișcare al particulei de ulei (fig. 5.2.1).

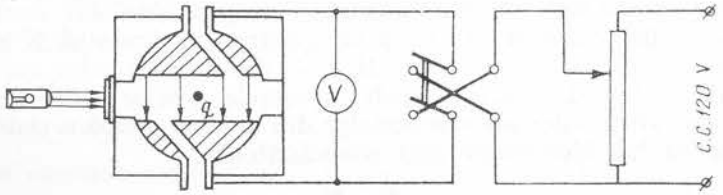


Fig. 5.2.1

a) Știind că forța $\vec{f}$ datorită frecării picăturii de ulei cu aerul este proporțională cu raza r a picăturii și viteza $\vec{V}$ a acesteia, și presupunînd că deplasările picăturii în cele două sensuri decurg cu viteze constante (diferite) să se scrie bilanțul forțelor care acționează asupra picăturii la urcare și coborîre.

b) Să se scrie expresia sarcinii q purtate de picătura de ulei în funcție de tensiunea U, timpul de urcare t_u și timpul de coborîre t_c al picăturii între două repere orizontale aflate la distanța d între plăcile condensatorului; să se arate că produsul K al factorilor care intervin în expresia sarcinii q, dar nu depind de valorile mărimilor U, t_u, t_c caracteristice fiecărei experiențe, nu depinde nici de raza r a picăturii, fiind un parametru specific dispozitivului utilizat.

Aplicație numerică: $t_c = 4$ s, $t_u = 7$ s, $U = 80$ V, $K = 4{,}977 \cdot 10^{-16}$ J $\cdot$ s$^{3/2}$.

5.3.1. Pentru a determina viteza v a unui fascicul de electroni monocinetici (de aceeași viteză) și sarcina specifică e/m a acestora, F. Kirchner (1924) a propus următoarea metodă experimentală (fig. 5.3.1): un fascicul de electroni filiform emis de catodul C trece prin diafragmele D_1 și D_2, atrași fiind de potențialul anodic constant U_a. Pe ambii condensatori C_1 și C_2 se aplică o tensiune de înaltă frecvență ν, în fază.

Să se calculeze în aproximația clasică, nerelativistă, expresiile vitezei electronilor și sarcinii lor specifice e/m în funcție de U_a, frecvența minimă ν_1 (a tensiunii alternative aplicate între armăturile condensatorilor C_1, C_2) pentru care fasciculul de electroni poate ajunge nedeviat la ecranul osciloscopului, și distanța d dintre condensatorii C_1 și C_2.

Aplicație numerică: $U_a = 1000$ V, $\nu_1 = 92$ MHz, $d = 10$ cm.

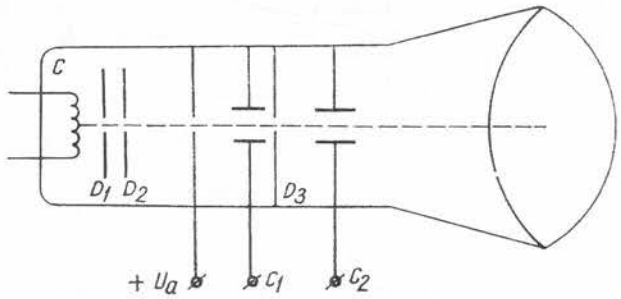


Fig. 5.3.1

5.3.2. Un fascicul de electroni monocinetici străbate linia mediană a unui condensator plan avînd între plăci o tensiune electrică constantă U. Lungimea armăturilor fiind l și d distanța dintre ele, se cere:

a) Să se scrie ecuația curbei după care se mișcă fasciculul de electroni în interiorul condensatorului.

b) Valoarea minimă a vitezei inițiale pentru ca fasciculul să poată ieși din condensator.

c) Indicați un dispozitiv experimental care ar permite o creștere a deviației fasciculului electronic (fig. 5.3.2).

Aplicație numerică: $U = 100$ V, $l = 5$ cm, $d = 2$ cm.

5.3.3. Un fascicul de electroni emiși de catod cu o viteză neglijabilă și apoi accelerați de tensiunea anodică U_a pătrunde într-un cîmp electric constant și uniform $\vec{E}$ creat de un condensator plan de lungime l.

a) Calculați expresia micilor deviații ale fasciculului de electroni în cîmpul $\vec{E}$.

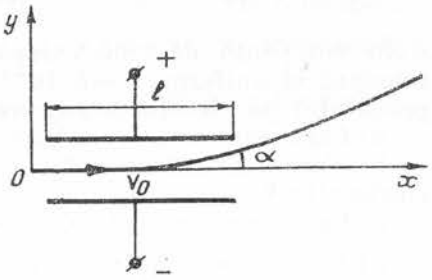


Fig. 5.3.2

b) Arătați că fasciculul de electroni pare să provină dintr-o sursă punctuală virtuală din interiorul condensatorului plan, a cărei poziție se va calcula.

c) Calculați deviația fasciculului electronic (δ) pe un ecran situat la distanța $D = 10\ l$ față de extremitatea finală a condensatorului plan (fig. 5.3.3).

Aplicație numerică : $U_a = 800$ V ; $l = 5$ cm ; $E = 4 \cdot 10^3$ V/m.

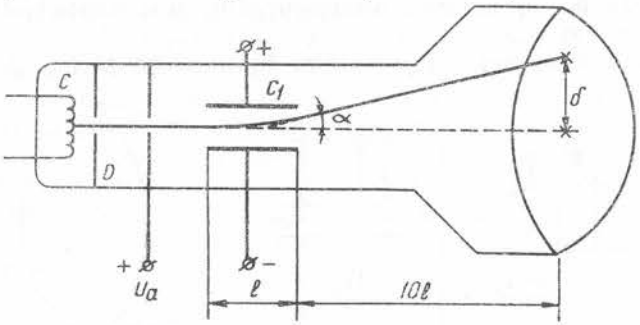


Fig. 5.3.3

5.4.1. Un fascicul — de deschidere α foarte mică — de ioni avînd energii egale, intră în cîmpul magnetic constant, uniform și transversal, al unui spectrograf de masă.

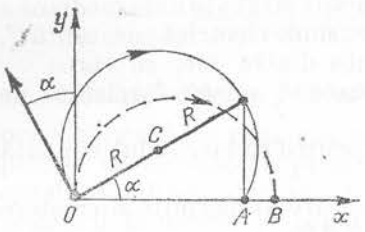


Fig. 5.4.1

Să se determine lărgimea AB a imaginii obținute, în funcție de unghiul α și raza de curbură R a traiectoriei ionilor în zona cîmpului magnetic.

Aplicație numerică : $\alpha = 0{,}05$ rad, $R = 3$ mm.

5.4.2. Un fascicul de electroni emiși de un catod, cu viteze inițiale neglijabile, sînt accelerați de o tensiune constantă de 2000 V după care intră într-un cîmp magnetic constant și uniform, $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T, din interiorul unei bobine, perpendicular pe direcția de mișcare a electronilor.

a) Care este raza de curbură R a fasciculului ?

b) Care este mărimea forței centrifuge ce acționează asupra electronilor ?

c) Care este frecvența de rotație a electronilor pe orbită ?

d) Presupunem că acest cîmp $\vec{B}$ uniform acționează pe o lungime $MN = 10$ mm. Să se calculeze deviația β a fasciculului.

5.4.3. Un electron emis de catodul unui oscilograf catodic, accelerat de o tensiune anodică U_a, are o viteză $\vec{v}$ care face un unghi α cu direcția $\vec{B}$ a cîmpului constant și uniform creat de o bobină exterioară

(vezi fig. 5.4.3). În acest caz mișcarea electronului este elicoidală.

Un electron care pleacă din punctul M de pe axa Ox descrie o elice, după care ajunge din nou pe axa Ox, în alt punct N.

a) Arătați că perioada mișcării elicoidale este independentă de unghiul α.

b) Arătați că studiul mișcării electronului poate conduce la determinarea sarcinii lui specifice.

c) Cum se poate realiza o experiență bazată pe această metodă, care să poată permite determinarea experimentală a sarcinii specifice a electronului ?

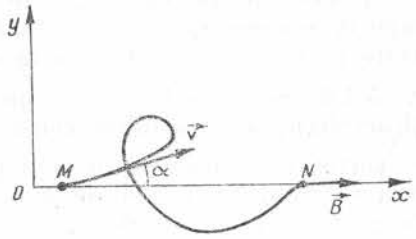


Fig. 5.4.3

Aplicație numerică :

$$U_a = 800\ V, \qquad MN = 10\ \text{cm}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}, \qquad B = 10^{-3}\ T.$$

5.4.4. Pentru a determina sarcina specifică e/m a electronilor, J. J. Thomson a făcut următoarea experiență : s-a produs un fascicul de electroni într-un tub vidat și s-a măsurat sarcina electrică totală Q transportată de acești electroni într-un interval de timp, cu ajutorul unui electrometru legat de un cilindru Faraday.

În același timp, același fascicul de electroni a fost trimis și pe un termocuplu care se încălzea și măsura energia totală W transportată de electroni în același interval de timp.

Apoi se producea deviația acestor electroni într-un cîmp uniform și constant $\vec{B}$ cunoscut, măsurînd raza de curbură r a traiectoriei acestora.

Să se demonstreze că aceste date ne permit calculul vitezei electronilor și a sarcinii lor specifice.

Aplicație numerică :

$$Q = 1{,}6\ \text{C}, \qquad B = 3 \cdot 10^{-3}\ T$$

$$r = 2\ \text{mm}, \qquad W = 5\ J.$$

5.4.5. Un fascicul de ioni a căror viteză inițială poate fi variată, intră într-o regiune l a spațiului în care acționează simultan, după aceeași direcție și sens (perpendicular pe direcția fasciculului), un cîmp electric și un cîmp magnetic, uniforme în spațiu și constante

în timp. Fasciculul de ioni este apoi înregistrat pe un ecran (placă fotografică) aşezat la distanţa $OP = D$ faţă de punctul de ieşire din zona de aplicare a celor două cîmpuri (v. fig. 5.4.5.R).

a) Care sînt ecuaţiile de mişcare ale fasciculului de ioni în zona de acţiune a celor două cîmpuri?

b) Considerînd că deviaţiile produse de cele două cîmpuri sînt mici în comparaţie cu distanţa D, să se afle expresia curbei înregistrate pe placa fotografică, prin devierea fasciculului de ioni.

5.4.6. Se consideră ionii pozitivi produşi de sursa S (fig. 5.4.6) şi accelerați de tensiunea constantă U. Cu ajutorul diafragmelor D se sortează un fascicul de ioni presupuşi monocinetici, de viteză $\vec{v}$, care pătrund într-o regiune în care există un cîmp electric şi un cîmp magnetic, ambele uniforme şi constante în timp, perpendiculare unul pe celălalt şi ambele perpendiculare pe direcţia vitezei iniţiale $\vec{v}$ a fasciculului.

a) Să se arate că este posibilă găsirea unor valori convenabile pentru cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ care să lase fasciculul de ioni nedeviat.

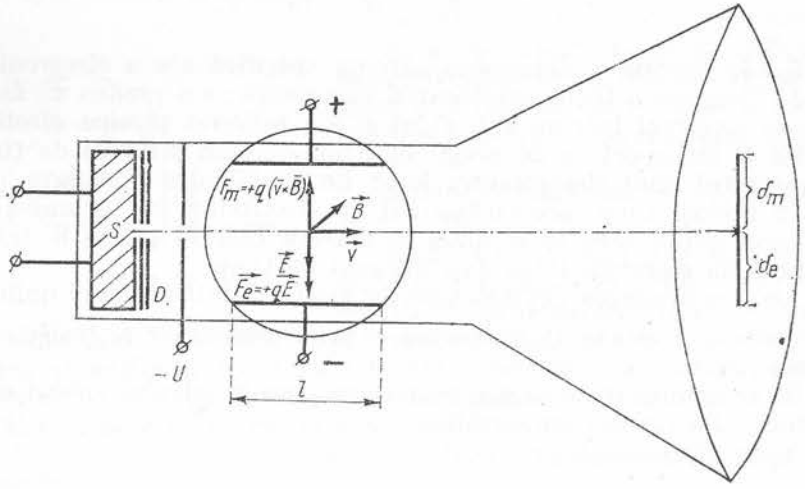


Fig. 5.4.6

b) Să se arate că în acest caz dispozitivul indicat în fig. 5.4.6 poate fi utilizat pentru determinarea experimentală a vitezei fasciculului de ioni monocinetici şi a sarcinii lor specifice.

c) Presupunînd intensităţile cîmpurilor considerate ca omogene pe o lungime l a traiectoriei ionilor, să se compare curburile produse de

aceste cîmpuri, în funcţie de intensitatea acestora, pentru cazul unor deviaţii mici faţă de lungimea tubului ionic.

Aplicaţie numerică:

$$U = 10{,}44\ \text{V}, \quad E = 50\ \text{V/cm}, \quad B = 0{,}0125\ \text{T}.$$

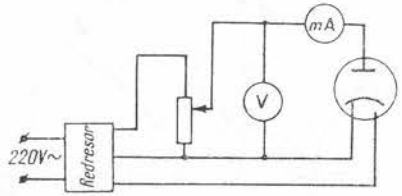


Fig. 5.4.8

5.4.7. Pentru determinarea sarcinii specifice $\frac{e}{m}$ a electronului s-a utilizat montajul experimental din fig. 5.4.8.

Se demonstrează că în anumite ipoteze simplificatoare dependenţa intensităţii curentului anodic I_a de tensiunea anodică U_a este de forma

$$I_a = K U_a^{3/2}. \tag{1}$$

În cazul unui catod cu electrozi coaxiali, coeficientul K are expresia

$$K = 34{,}9 \cdot 10^{-12} \sqrt{\frac{e}{m}}\ \frac{l}{r\ \beta^2} \tag{2}$$

unde s-a notat cu l lungimea catodului, cu r raza anodului şi cu β un coeficient care depinde de raportul dintre raza anodului şi a catodului.

Utilizînd montajul electronic din fig. 5.4.8 s-au obţinut următoarele valori experimentale:

U_a(V)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
I_a(mA)	0,4	1,08	2	3,05	4,25	5,6	7,2	8,7	10,3	12	13,8	15,7	17,6	19,6	21,8

Să se calculeze raportul $\frac{e}{m}$ cu ajutorul acestor valori numerice, ştiind că $l = 7$ mm, $r = 9{,}5$ mm şi $\beta^2 = 0{,}98$.

5.5.1. Se demonstrează că o particulă α care trece prin apropierea unui nucleu este difuzată sub un unghi Φ, traiectoria ei fiind un arc de hiperbolă (fig. 5.5.1) al cărei focar exterior coincide cu nucleul difuzant N.

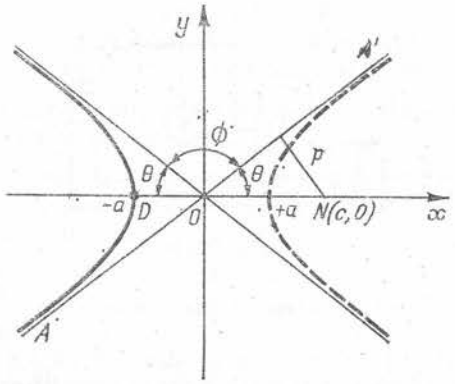


Fig. 5.5.1

a) Folosind notaţiile din figură să se scrie ecuaţia de mişcare a particulei α difuzate.

b) Să se scrie ecuaţia de mişcare a particulei α la distanţe mari faţă de nucleul difuzant.

c) Se numeşte parametru de şoc p distanţa de la nucleul difuzant la direcţia iniţială AA' de mişcare a particulei α.

Să se calculeze raportul dintre viteza V a particulei α în vîrful hiperbolei şi viteza ei iniţială V_0, în funcţie de parametrul de şoc p şi unghiul θ.

d) Să se demonstreze că dependenţa parametrului de şoc p de unghiul de difuzie Φ este de forma $p = \frac{K}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}$, unde K este o constantă a cărei valoare va fi calculată.

e) Particula α avînd o energie de 10 MeV se ciocneşte cu un atom de aur ($Z = 79$) aflat în repaus. Ştiind că $\theta = 30°$, să se calculeze parametrul de şoc p.

5.5.2. Se observă particulele α difuzate de o foiţă subţire de aur după scintilaţiile pe care acestea le produc pe un ecran de sulfură de zinc (ZnS), aflat la distanţa D faţă de foiţă.

a) Să se arate că N_Φ, numărul de particule α difuzate care ajung pe unitatea de suprafaţă a ecranului E de ZnS, depinde de unghiul Φ de difuzie după relaţia.

$$N_\Phi = N n \frac{Z^2 e^4}{16 \pi \varepsilon_0 M^2 V^4 D^2} \frac{d}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}} = \frac{\pi K^2 N n d}{16 D^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}$$

unde s-a notat cu N numărul de particule α de masă M şi viteză v (corespunzătoare distanţei celei mai mici faţă de nucleul difuzant de sarcină de Z) şi cu n numărul de nuclee difuzante pe unitatea de volum din foiţa subţire de grosime d.

b) Acest tip de experienţă a fost făcută de Geiger şi Marsden (1913), pentru a verifica experimental modelul atomic planetar propus de Rutherford.

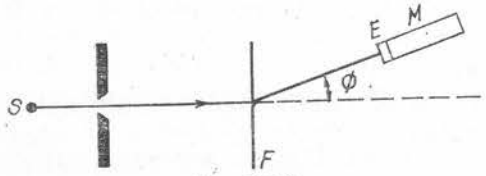


Fig. 5.5.2

Schema de principiu a montajului experimental este dată în fig. 5.5.2, unde S este substanţa radioactivă care emite radiaţii α, F foiţa subţire difuzantă, E ecranul de ZnS ataşat la un microscop M de observare a scintilaţiilor. Rezultatele experimentale obţinute pentru foiţa subţire de Au şi Ag sînt date în tabelul :

Φ	150°	135°	120°	105°	75°	60°	45°	30°	15°
$(N_\Phi)_{Au}$	33,1	43	51,9	69,5	211	477	1 435	7 800	132 000
$(N_\Phi)_{Ag}$	22,2	27,4	33	47,3	136	320	989	5 260	105 400

Să se reprezinte grafic $N_\Phi = f(\operatorname{cosec}^4 \Phi/2)$.

5.6.1. Să se calculeze în numere de undă şi în lungimi de undă intervalele spectrale în care se situează seriile Lyman, Balmer,

Paschen, Brackett, Pfund și Pickering-Humphreys. Să se reprezinte în scara lungimilor de undă sau a numerelor de undă, așezările lor relative.

Constanta Rydberg pentru hidrogen are valoarea $1{,}0967758 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$.

5.6.2. Pentru determinarea experimentală în laborator a liniilor H_α, H_β, H_γ și H_δ primele patru linii din seria spectrală Balmer a hidrogenului, se folosește un spectroscop cu prismă, în poziția corespunzătoare deviației minime, care analizează lumina emisă de un tub de descărcări electrice în hidrogen atomic.

a) Să se scrie dependența variației unghiului de deviație D al razelor de lumină în funcție de variația indicelui de refracție n al sticlei prismei cu lungimea de undă λ, pentru un unghi de incidență i constant.

b) Pregătirea de lucru a spectroscopului se face prin trasarea curbei de dispersie a acestuia $\lambda = f(x)$, unde s-a notat cu x diviziunile citite pe scala aparatului.

Utilizînd surse etalon de lumină s-au obținut următoarele rezultate experimentale :

λ (Å)	7000	6800	6500	6000	5500	5200	5000	4500	4200	4000
x	20,4	21,4	23,2	26,8	31,9	35,6	38,5	47,7	56,5	67

Să se traseze curba de dispersie a spectroscopului.

c) Observîndu-se liniile spectrului vizibil al hidrogenului atomic s-au notat următoarele diviziuni corespunzătoare ale spectroscopului : pentru linia H_α diviziunea $x_1 = 23{,}1$; pentru linia H_β diviziunea $x_2 = 41$; pentru linia H_γ diviziunea $x_3 = 51{,}8$ și pentru linia H_δ diviziunea $x_4 = 60{,}2$.

Utilizînd curba de dispersie a spectrografului să se deducă lungimile de undă ale acestor radiații.

5.6.3. Se studiază cu ajutorul unui spectrograf cu rețea prin transmisie spectrul de emisie vizibil al hidrogenului atomic.

a) Știind că linia H_α are lungimea de undă $\lambda_\alpha = 6565$ Å, să se determine constanta B din relația lui Balmer (11).

b) Să se calculeze apoi, cu ajutorul relației (11), lungimea de undă a liniei H_γ.

c) Se măsoară experimental cu ajutorul spectroscopului lungimile de undă ale liniilor H_β și H_γ, obținînd $\lambda_\beta = 4863$ Å și $\lambda_\delta = 4103$Å. Aplicînd principiul de combinație al termenilor spectrali a lui Ritz să se găsească prin calcul cea de a doua linie spectrală din seria Brackett.

d) Spectrul hidrogenului este studiat cu o rețea cu 10^3 trăsături/mm. Fasciculul paralel de raze incidente vine după direcția normalei la rețea. Care este valoarea numerică a cosinusului unghiului θ format de normala la rețea cu razele difractate în spectrul de ordinul I pentru linia H_γ?

e) Spectrul de ordinul I se formează în planul focal al unei lentile cu o distanță focală $f = 15$ cm. Se cere distanța liniară dintre imaginile liniilor H_β și H_δ ale spectrului vizibil.

5.6.4. Atomul de deuteriu emite în domeniul vizibil o serie spectrală analoagă seriei Balmer exprimate prin relația (12).

a) Cunoscînd că în condițiile experimentale ale laboratorului, constanta lui Rydberg pentru atomul de deuteriu are valoarea $R_D = 1{,}09707 \cdot 10^7$ m^{-1}, să se calculeze lungimea de undă λ și numărul de undă $\tilde{\nu}$ pentru primele patru linii din spectrul vizibil al deuteriului atomic.

b) Care este prima linie spectrală (capul seriei) și ultima linie (limita seriei) pentru seria Lyman a deuteriului?

c) Se observă seria Balmer cu ajutorul unui spectroscop cu o rețea avînd 200 trăsături/mm. Care este unghiul θ pentru care se observă maximul de ordinul I al liniei D_α?

Care este numărul maxim de maxime care pot fi observate la această rețea pentru linia D_α?

d) Care este dispersia $\frac{d\theta}{d\lambda}$ a rețelei spectrografului pentru maximul de ordinul I al liniei D_α?

Spectrul considerat se formează în planul focal al unei lentile de distanță focală $f = 1{,}2$ m. Care este distanța unghiulară și liniară dintre primele două linii din spectrul vizibil al deuteriului?

5.7.1. Știind că numărul maxim de electroni de pe o orbită circulară este de $2n^2$, unde n este numărul cuantic principal, să se reprezinte grafic distribuția electronilor pe orbite în jurul nucleului la

izotopul $^{35}_{17}Cl$.

Care este valența chimică a acestui element?

5.7.2. a) Să se calculeze valorile cuantificate ale energiei electronului în atomul de hidrogen, pe baza postulatelor lui Bohr.

b) Să se calculeze valorile energiei cinetice, potențiale și totale ale unui electron pe prima orbită a lui Bohr.

c) Se cere valoarea impulsului electronului aflat pe orbita a treia.

d) Care este raportul dintre energia totală a electronului cînd se află pe orbita a doua și a șasea?

5.7.3. Se cere să se calculeze: a) razele primelor trei „orbite" ale electronului din atomul lui Bohr; b) viteza unui electron pe aceste „orbite". Se cunosc: $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}\ 10^{-9}$ F/m; $m_e = 9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ J.s.

5.7.4. Care este intensitatea cîmpului electric al nucleului pe primele 3 „orbite" Bohr ale atomului de hidrogen?

5.7.5. Să se calculeze raportul dintre forțele de atracție coulombiană, respectiv gravitațională dintre nucleul izotopului $^{298}_{92}U$ și unul din electronii săi orbitali.

Se dă constanta atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² și $\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ m/F.

5.7.6. a) Utilizînd relațiile (12) și (23) să se calculeze valoarea constantei lui Rydberg în ipoteza că masa protonului este mult mai mare decît masa electronului orbital, nucleul atomului de hidrogen fiind astfel în repaus.

b) Cunoscînd valorile măsurate experimental ale constantei lui Rydberg pentru hidrogen $R_H = 1{,}096776 \cdot 10^7$ m⁻¹ și pentru heliu $R_{He} = 1{,}097223 \cdot 10^7$ m⁻¹ [unde s-a luat în considerare și mișcarea nucleului], să se determine cu ajutorul acestor constante raportul dintre masa protonului și masa electronului.

c) Ținînd seama de mișcarea nucleului să se determine constanta lui Rydberg pentru atomul de deuteriu.

5.7.7. Verificarea experimentală a teoriei lui Bohr a fost făcută de către Franck și Hertz (1913), cu ajutorul unui dispozitiv reprezentat schematic în fig. 5.7.7. În tubul vidat T se găsesc vapori de Hg produși cu ajutorul unui mic cuptoraș în care se încălzesc cîteva picături de Hg. Electronii emiși de filamentul de tungsten F sînt accelerați de către potențialul de accelerare aplicat pe grila G_2.

Grila G_1 are rolul de a uniformiza vitezele electronilor în spațiul G_1G_2 unde au loc ciocnirile electronilor cu atomii de Hg. Electronii ajung astfel pe placa P, curentul din tub fiind măsurat cu ajutorul galvanometrului G.

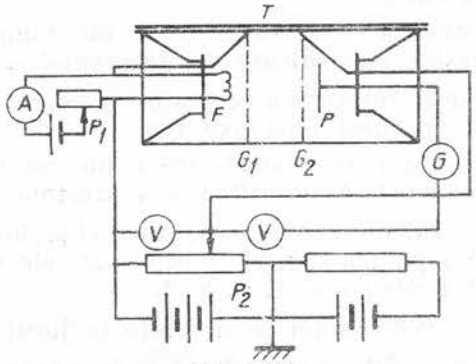


Fig. 5.7.7

a) Se aplică diferite tensiuni de accelerare U_2 între grilele G_2 și G_1, cu ajutorul potențiometrului P_2. Rezultatele experimentale sînt trecute în tabelul de mai jos.

U_2(V)	1	2	2,5	3,5	4,5	4,9	5,3	5,5	6,3	7,5	8,5	9,1	9,8	10
I(μA)	1,5	3,1	4,25	7,5	10	10,5	9	6	2,5	5	10	15	19,5	19,2

U_2(V)	11	11,3	12,25	13,75
I(μA)	15	10	6	10

Să se reprezinte grafic curba $I = f(U_2)$.

b) Cu ajutorul curbei trasate să se determine energiile de excitare ale atomului de Hg.

Să se determine frecvența ν și lungimea de undă λ a radiației emise de atomul de Hg cînd revine în starea inițială.

c) Care este valoarea numerică a termenului spectroscopic fundamental T_0 pentru atomul de He știind că potențialul de ionizare pentru Hg este de 10,38 V?

d) Considerînd valorile experimentale pentru potențialul de excitare, să se calculeze valoarea numerică a primului termen spectral T_1 corespunzînd unui nivel excitat.

5.8.1.* Se consideră un oscilator liniar de masă m care oscilează după legea $x = a \sin \omega t$.

Considerînd condiția de cuantificare a lui Sommerfeld (25') să se găsească expresiile cuantificate ale frecvenței ν și energiei W.

5.8.2.* Se numește rotator un corp aflat în mișcare de rotație uniformă $\omega = \text{const.}$ în jurul unei axe fixe.

Considerînd condiția de cuantificare a lui Sommerfeld (25') să se deducă energia cinetică cuantificată a acestuia.

5.8.3.* Să se calculeze excentricitatea elipselor ε și raportul semiaxelor acestora pentru orbitele posibile ale electronilor cu ajutorul relației (26) pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

5.9.1. Mișcarea electronului pe o orbită în jurul nucleului duce la existența unui moment cinetic orbital $\vec{L}$ și a unui moment magnetic orbital $\vec{\mu}$.

a) Să se calculeze raportul giromagnetic orbital $\frac{\mu}{L}$.

b) Care este sensul lui $\vec{L}$ în raport cu $\vec{\mu}$?

c) Se știe că valoarea raportului giromagnetic pentru mișcarea de spin a electronului, este dublă față de raportul giromagnetic orbital; care este în acest caz valoarea proiecției momentului magnetic de spin pe o direcție dată din spațiu?

d) Proiecția momentului cinetic orbital pe o direcție din spațiu (de ex. pe direcția unui cîmp magnetic exterior) este cuantificată cu $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$. Să se scrie valorile posibile ale pr $\vec{\mu} = \mu_z$ pentru $n = 4$.

5.10.1. H. G. J. Moseley a obținut (anul 1913) relațiile (29) — (31) care îi poartă numele, unde $R = 1{,}0972 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$.

Pentru linia K_α s-a stabilit empiric că valoarea constantei b este $b = 1$.

a) Știind că s-au găsit experimental următoarele valori pentru lungimea de undă λ a radiației K_α, pentru diferite substanțe:

$$\lambda_1 = 8{,}364\text{Å};\ \lambda_2 = 3{,}759\text{Å};\ \lambda_3 = 3{,}368\ \text{Å};\ \lambda_4 = 1{,}662\ \text{Å};$$

$$\lambda_5 = 0{,}560\ \text{Å}$$

să se găsească numărul atomic Z al acestor elemente și să se identifice aceste elemente din tabelul lui Mendeleev.

b) Să se reprezinte grafic $\sqrt{\nu} = f(Z - 1)$.

5.10.2. Pentru elementul $^{108}_{47}\text{Ag}$ s-a găsit pentru linia L_α lungimea de undă $\lambda = 4{,}17$ Å.

a) Să se deducă valoarea constantei b.

b) Să se găsească numărul atomic Z și să se identifice aceste elemente din tabelul lui Mendeleev, pentru următoarele substanțe la care s-au obținut următoarele valori pentru lungimea de undă a liniei L_α:

$$\lambda_1 = 5{,}423\ \text{Å};\ \lambda_2 = 1{,}525\ \text{Å};\ \lambda_3 = 1{,}316\ \text{Å};\ \lambda_4 = 1{,}287\ \text{Å}.$$

c) Să se reprezinte grafic $\sqrt{\nu} = f(Z - b)$.

5.10.3. Cu ajutorul datelor experimentale din problemele 5.10.1 și 5.10.2 să se facă reprezentarea grafică $\sqrt{\nu} = f(Z)$.

5.10.4. Legea lui Moseley (29) poate fi scrisă cu o bună aproximație sub forma: $\sqrt{\frac{\nu}{Rc}} = \chi(Z - \sigma)$. Pentru linia K_α a elementelor cu numărul de ordine $20 < Z < 30$ valorile acestor constante sînt $\chi = 0{,}874$ și $\sigma = 1{,}13$, iar pentru linia L_α a elementelor cu $Z \geqslant 62$ valorile constantelor devin $\chi = 0{,}376$ și $\sigma = 7{,}90$.

Să se determine numerele de undă pentru linia K_α la elementele cu $Z_1 = 25$, $Z_2 = 26$ și pentru linia L_α la elemente cu $Z_3 = 65$ și $Z_4 = 70$.

5.10.5. W. L. Bragg (1912) a stabilit relația (32) care îi poartă numele (v. breviarul).

În acest scop s-a folosit un spectrometru de raze X (v. fig. 5.10.5) unde un fascicul bine colimat de raze X se difractă pe rețeaua naturală a monocristalului C după care este înregistrat cu ajutorul unei camere de ionizare $C.I.$ mobilă, legată de un electrometru E.

a) Considerînd difracția unei raze X care face un unghi θ cu două plane cristaline consecutive, să se stabilească relația (32).

b) Utilizînd ca etalon de măsură un monocristal de $CaCO_3$ cu o constantă de rețea $d = 3{,}03567$ Å și linia K_α a elementului $^{59}_{27}\text{Co}$ cu o lungime de undă $\lambda = 1{,}798$ Å, să se găsească unghiul θ pentru maximul de ordinul 2.

c) Cîte maxime de difracţie se vor observa?

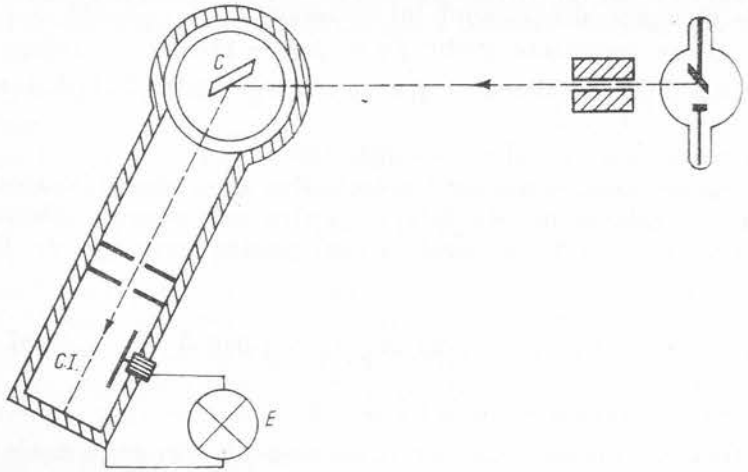


Fig. 5.10.5

5.11.1. Laserul cu He-Ne emite unele radiaţii monocromatice cu următoarele lungimi de undă exprimate în μm: 0,6046; 0,6293, 0,6328, 1,0844; 1,1390 etc.

Să se calculeze frecvenţa, numărul de undă, energia şi impulsul fotonului pentru fiecare radiaţie emisă.

5.11.2. Să se calculeze lungimea de undă asociată unui proton, care are o energie cinetică egală cu 10^2 ori energia de repaus a neutronului. Se dau: $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

5.11.3. Dacă admitem că unda asociată unui electron aflat pe o orbită circulară Bohr trebuie să fie o undă staţionară, lungimea orbitei staţionare fiind un multiplu întreg al lungimii de undă, să se arate că, pornind de la această ipoteză se poate obţine expresia matematică a postulatului I a lui Bohr. (Manualul de fizică clasa a XII-a, p. 135).

5.11.4. Ce tensiuni de accelerare sînt necesare pentru un fascicul de electroni emişi de un tun electronic, pentru a fi puse în evidenţă proprietăţile lor ondulatorii prin difracţia pe un sistem de plane cristaline paralele, distanţate prin $d = 3$Å?

5.11.5. Considerînd unda de Broglie asociată unui electron cu o energie de 1 keV, să se precizeze limitele între care această particulă poate fi considerată ca atare sau trebuie să i se ia în considerare proprietăţile ei ondulatorii.

5.11.6. Un fascicul paralel de radiaţii electromagnetice monocromatice, trecînd printr-o diafragmă prevăzută cu o fantă dreptunghiulară îngustă aşezată perpendicular pe direcţia fasciculului de lumină, formează franje de difracţie pe un ecran*.

Să se calculeze impulsul fotonilor dacă se ştie că primul minim apare într-o direcţie care face un unghi $\varphi = 0{,}2°$ cu normala fantei.

Lărgimea fantei dreptunghiulare este de 6μm.

5.11.7. Într-o experienţă de tip Davisson s-a trimis un fascicul de electroni acceleraţi de o tensiune constantă de 15 V pe un sistem de plane atomice, distanţate prin $d = 2{,}33$Å, ale unui cristal de aluminiu.

Să se calculeze unghiurile făcute de fasciculul difractat cu suprafaţa cristalului, corespunzătoare primelor două poziţii de maxim.

5.11.8. În tabelul de mai jos se dau distanţele dintre planele consecutive ale sistemelor de plane cristaline paralele (ale diferitelor metale indicate) pe care s-au observat difracţii ale unor fascicule electronice.

Substanţa	Al	Fe	Ag	Pt	Pb
d(Å)	2,33	2,02	2,36	2,75	2,84

a) Să se calculeze unghiul dintre fasciculul de electroni incident şi respectivele plane cristaline, considerînd tensiunea de accelerare constantă de 400 V, pentru cazul celui de al 6-lea maxim de difracţie.

b) Menţinînd unghiul θ constant şi considerînd acelaşi ordin al maximului de difracţie, care trebuie să fie raportul dintre tensiunile de accelerare pentru fier şi plumb?

5.11.9. Un nucleu de masă m aflat iniţial în repaus se dezintegrează în două fragmente cu masele de repaus $m_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg şi $m_2 = 3{,}2 \cdot 10^{-25}$ kg. Să se calculeze lungimea de undă asociată fiecărui fragment nuclear. Se dă $m = 6 \cdot 10^{-25}$ kg.

5.12.1*. Ecuaţia de propagare a vibraţiei într-o coardă vibrantă de lungime l fixată la ambele extremităţi, este de forma $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, unde y este elongaţia corzii vibrante într-un punct de abscisă x, iar u este viteza constantă de propagare a oscilaţiei în coarda liberă.

* V. şi problema 2.4.4.

Presupunînd că se poate considera o separare de variabile de forma $y(x, t) = f(x)\, g(t)$ să se rezolve ecuația de propagare și să se arate că ea admite posibilitatea ca numai anumite unde staționare discrete să poată lua naștere în coardă.

5.12.2.* Ecuația de propagare a unei unde într-un mediu dat este de forma: $\Delta \Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$, unde Ψ este funcția care descrie unda care se propagă cu viteza constantă u în mediul considerat*.

a) Se presupune că unda considerată este o undă monocromatică de frecvență ν, descrisă de funcția $\Psi(x, y, z, t) = \Psi_0(x, y\, z)\, e^{i \cdot 2\pi\nu t}$. Să se arate că formal, atașînd undei un impuls care satisface expresia matematică a undei asociate (33) și o energie $E = h\nu$ se poate justifica ecuația lui Schrödinger (34).

b) Este această demonstrație principial corectă?

5.12.3.* Să se scrie ecuația lui Schrödinger pentru cazul unui electron de sarcină e, care se mișcă în cîmpul unui nucleu de sarcină $+Ze$.

5.12.4. Aplicînd principiul de excluziune a lui Pauli se cere numărul total de electroni dintr-un atom care pot avea:

a) aceleași patru numere cuantice (n, l, m_l, m_s);
b) aceleași trei numere cuantice (n, l, m_l);
c) aceleași două numere cuantice (n, l);
d) același număr cuantic principal n.

5.12.5. Notația spectroscopică a atomului $^{40}_{20}Ca$ este $1s\ 2s\ 2p\ 3s\ 3p\ 4s$. Să se explice această notație și să se scrie numărul de electroni pe fiecare pătură și subpătură.

* $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$.

Partea a patra

FIZICĂ NUCLEARĂ

6. FIZICĂ NUCLEARĂ

BREVIAR

1) *Caracterizarea nucleului atomic*

În lumina cunoștințelor actuale, nucleul atomic este format din protoni și neutroni. Între protoni, care sînt încărcați cu sarcină elementară pozitivă, se exercită forțe de repulsie electrostatică. Pentru a putea explica coeziunea nucleului, trebuie să admitem că între nucleoni se exercită forțe de tip specific, numite forțe nucleare, caracterizate prin următoarele proprietăți:

— sînt forțe de atracție;

— au un caracter de saturație, adică un nucleon (proton sau neutron) interacționează numai cu un număr limitat de nucleoni;

— prezintă o scădere foarte rapidă cu distanța, ele devenind practic nule în afara nucleului, dar avînd valori foarte mari în imediata apropiere a nucleonilor;

— sînt independente de sarcina nucleonilor, interacțiile proton-neutron, proton-proton și neutron-neutron fiind practic echivalente *.

Independența forțelor nucleare de tipul particulei nucleare (proton sau neutron) au permis să se considere că aceste particule constituie doar stări ale unei singure particule elementare, numite *nucleon*, ele trecînd una în alta conform relației

$$^1_0n \rightleftarrows {}^1_1p + \pi^-$$
$$^1_1p \rightleftarrows {}^1_0n + \pi^+$$

* Forțele de repulsie electrostatică ca și cele de natură magnetică etc., au doar un caracter corectiv.

unde cu π^- şi cu π^+ au fost notaţi mezonii corespunzători. La fel

$$_0^1n \rightleftarrows {}_0^1n + \pi^0$$
$$_0^1p \rightleftarrows {}_1^1p + \pi^0$$

Caracterul de saturare al forţelor nucleare, permite stabilirea între raza nucleului şi numărul masic a următoarei relaţii semiempirice $R = R_0 A^{1/3}$ unde $R_0 \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ m, din care obţinem pentru volumul nucleului $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$, adică volumul unui nucleu se compune din volumele, am putea spune „proprii" sau corespondente, celor A nucleoni din nucleu. Existenţa celor Z protoni în nucleu, face ca oricărei particule încărcate pozitiv cu sarcina ze, (şi avînd raza r), să i se prezinte ca obstacol natural la intrarea în nucleu o barieră coulombiană de potenţial: $B = \frac{z Ze^2}{R + r}$, egală cu energia necesară particulei încărcate pentru a ajunge în contact cu nucleul; această barieră nu se prezintă şi particulelor neutre (neutronilor), ceea ce face ca reacţiile nucleare cu neutronii să fie mult mai probabile decît cele cu particule încărcate.

Conform cunoştinţelor actuale, un nucleu este format din Z protoni şi $A-Z$ neutroni; masa acestui nucleu, ar trebui să fie deci $M_0 = Z\, m_{0p} - (A - Z)\, m_{0n}$. Spectrometria de masă a permis însă determinarea exactă a masei M a nucleelor, şi pentru toate nucleele existente (stabile sau radioactive) s-a găsit că $M < M_0$. Diferenţa $\Delta M = M_0 - M$ se numeşte „defect de masă" al nucleului respectiv şi ea reprezintă masa pierdută (eliberată) în momentul formării nucleului. Acestei mase îi corespunde, conform relaţiei de proporţionalitate masă-energie introdusă de Einstein în teoria relativităţii restrînse, o energie eliberată în momentul formării nucleului din particulele componente; pentru a desface din nou nucleul în particulele componente, este nevoie să-i dăm o energie egală cu cea eliberată în momentul formării nucleului : $\Delta W = c^2 \Delta M$; din această cauză, această energie a fost numită energie de legătură a nucleului şi reprezintă fie energia pe care ar trebui să o dăm nucleului pentru a-l desface în particulele componente, fie energia eliberată în momentul formării nucleului

$$\Delta W = c^2 \Delta M = c^2 [Z\, m_{0p} + (A - Z) m_{0n} - M].$$

O altă mărime caracteristică tuturor nucleelor, şi cu semnificaţie fizică directă, este energia de legătură per nucleon a acestora, $\Delta W/A$,

care are (v. fig. 1) valoarea maximă (circa 8,7 MeV/nucleon)pentru nucleele avînd numere de ordine medii ($Z = 20...60$), (respectiv numere de masă de cca 40...100), fiind mai mică la începutul şi sfîrşitul

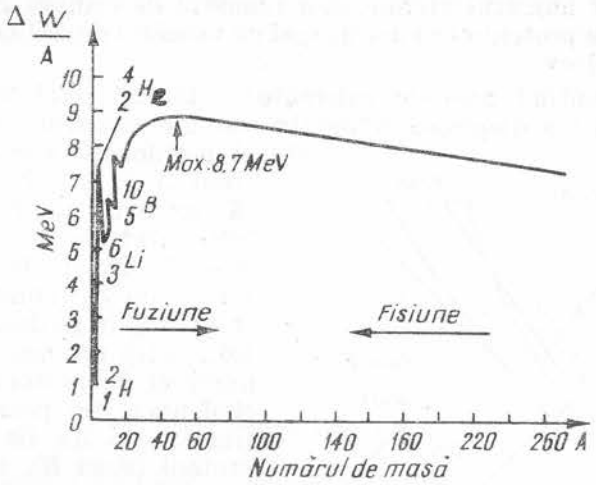


Fig. 1

sistemului periodic. Nucleele tind însă spre o stare de stabilitate maximă, ceea ce face ca nucleele de la începutul sistemului să tindă către cele avînd numere de ordine medii prin reacţii de *fuziune*, iar cele grele să tindă spre cele medii prin reacţii de *fisiune*, cu eliberare a diferenţei de energie de legătură corespunzătoare.

În funcţie de numărul de nucleoni de fiecare tip din nucleu, nucleele pot fi clasificate astfel:

Izotopi. Nuclizi avînd acelaşi număr de ordine în tabelul lui Mendeleev (acelaşi Z), dar numere de neutroni diferite (de exemplu: $_1^1$H, $_1^2$H, $_1^3$H, adică hidrogenul uşor, sau protiul, al cărui nucleu îl constituie protonul, hidrogenul greu sau deuteriul şi hidrogenul supergreu sau tritiul constituie izotopii hidrogenului; $_8^{16}$O, $_8^{17}$O, $_8^{18}$O constituie izotopii oxigenului, etc.).

Izobari. Nuclizi care au acelaşi număr de nucleoni în nucleu (de exemplu: ^{59}Fe, ^{59}Co, ^{59}Ni etc.).

Izotoni. Nuclizi avînd acelaşi număr de neutroni în nucleu (acelaşi $A-Z$); de exemplu: $_1^3$H şi $_2^4$He sînt izotoni, avînd doi neutroni în nucleu.

Izomeri. Nuclizi avînd acelaşi număr de neutroni şi protoni în nucleu, dar proprietăţi radioactive diferite (de exemplu: $_{35}^{80}$Br are

doi izomeri, care se dezintegrează cu perioade de înjumătățire de 18 minute, respectiv 4,4 ore). În accepția actuală, numărul de masă (sau numărul masic) A, reprezintă deci numărul de nucleoni din nucleu, iar numărul atomic (sau numărul de ordine) Z, reprezintă numărul de protoni din nucleu, egal cu numărul de ordine din tabelul lui Mendeleev.

Reprezentînd nucleele existente în natură (stabile sau radioactive), într-o diagramă avînd în abscisă numărul de protoni Z și în ordonată numărul de neutroni $N = A - Z$, se constată că nuclizii stabili se situează între dreptele $A - Z = 2Z$ și $A - Z = Z$, (în fig. 2, zona de stabilitate S), numărul de neutroni fiind în nucleele stabile de 1,0 ... 1,3 ori mai mare decît numărul de protoni. În cazul cînd avem fie prea mulți neutroni (zona A), fie prea mulți protoni (zona B), nucleele sînt nestabile și se dezintegrează prin emisie de electroni (dezintegrare β^-, zona A) sau pozitroni (dezintegrare β^+, zona B), etc., tinzînd să revină în zona de stabilitate (haşurată) (fig. 2).

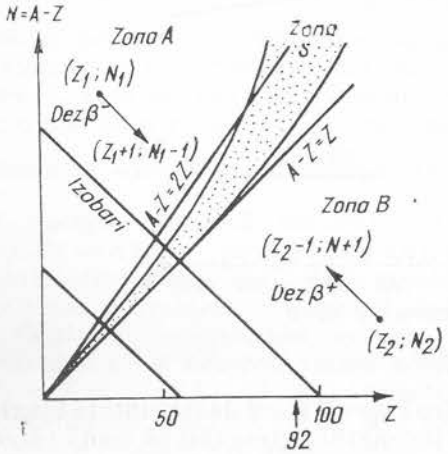


Fig. 2

Aceste procese pot fi explicate, dacă admitem că în cazul dezintegrărilor respective, un neutron trece într-un proton conform schemei:

$$^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}\beta + \bar{\nu} \quad \text{(pentru dezintegrările } \beta^-\text{)}$$

și respectiv*

$$^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}\beta + \nu \quad \text{(pentru dezintegrările } \beta^+\text{)}$$

2) *Procese nucleare*

a) *Radioactivitatea.* Proprietatea unor nuclizi de a se dezintegra, adică de a se transforma spontan (fără influență exterioară) în alți nuclizi, emițînd totodată radiații corpusculare (α, β) sau electromagnetice (γ), se numește radioactivitate.

* Cu $\bar{\nu}$ și ν au fost notate particulele numite „antineutrino" și „neutrino" care trebuie introduse pentru a satisface legile de conservare ale energiei și spinului".

Numărul* de nuclee radioactive N care mai rămîne într-un ansamblu după trecerea unui timp t, este indicat de legea exponențială $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ unde N_0 este numărul inițial de nuclee radioactive, iar λ este o constantă care depinde de tipul nuclidului și care se numește constantă radioactivă sau constantă de dezintegrare.

Se numește „timp de înjumătățire" (și se notează T) intervalul de timp după care numărul de nuclee radioactive rămase nedezintegrate dintr-un ansamblu de nuclee radioactive devine egal cu jumătate din numărul inițial de nuclee radioactive ale ansamblului.

Timpul de înjumătățire T este legat de constanta de dezintegrare radioactivă λ prin relația: $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{0{,}693}{\lambda}$.

Se numește „viață medie" τ a nucleelor radioactive dintr-un ansamblu, media timpilor după care se dezintegrează nucleele din ansamblul dat, care conține numai nuclee de un același tip. Viața medie este legată de tipul de înjumătățire prin relația

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \approx 1{,}44\, T.$$

Se numește „activitate radioactivă" numărul Λ de dezintegrări ce se produc în unitatea de timp într-un ansamblu de nuclee radioactive

$$\Lambda = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N_0\, \lambda \cdot e^{-\lambda t} = \lambda N; \quad \Lambda = \Lambda_0\, e^{-\lambda t}.$$

Viteza de dezintegrare sau „activitatea radioactivă" are ca unitate de măsură dezintegrarea pe secundă, sau multiplii acesteia: 1 rutherford $= 10^6 \dfrac{\text{dez}}{\text{s}}$; sau 1 Ci $= 3{,}7 \cdot 10^{10} \dfrac{\text{dez}}{\text{s}}$, cu submultiplii: 1 mCi$=3{,}7 \cdot 10^7$ dez/s; 1 μCi$= 3{,}7 \cdot 10^4$ dez/s. Curie-ul a fost definit inițial ca fiind activitatea radioactivă a unui gram de radiu, aflat în echilibru secular cu produsele sale de dezintegrare.

Scriind ecuațiile de dezintegrare ale unor procese în cascadă

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}t} = -\lambda_A N_A$$

$$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B, \text{ etc.,}$$

* În fapt, legea exponențială ne indică numai valoarea cea mai probabilă a numărului N(t).

proces în care nuclidul A trece în B, nuclidul B trece în C. Starea de echilibru secular se realizează numai în cazul cînd este îndeplinită condiția:

$$T_A \gg T_B \gg T_C \ldots \text{ etc. sau: } \lambda_A \ll \lambda_B \ll \lambda_C \ldots$$

În acest caz se obține pentru activitatea radioactivă a unui nuclid, relația:

$$\Lambda = \lambda_A N_A = \lambda_B N_B = \ldots$$

Prin activitatea specifică a unui preparat înțelegem numărul de dezintegrări care se produc în unitatea de timp, în unitatea de masă a unei substanțe radioactive, sau a unei substanțe inactive marcată cu un izotop radioactiv.

Numărul de nuclee dezintegrate în timpul Δt, va fi

$$N = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

Pentru $\lambda \Delta t \ll 1$, putem dezvolta în serie exponențiala reținînd doar primii doi termeni ($1 - e^{-x} \approx x$) și obținem

$$\Delta N = N_0 \lambda \Delta t.$$

Pentru a trece de la numărul de atomi (sau nuclee) radioactive la mase, se folosește legea lui Avogadro, conform căreia un atom-gram din orice substanță conține un număr de atomi egal cu $N_A = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ atomi/atom—gram deci:

A_{grame} conțin N_A atomi (unde A este numărul masic), iar

m grame conțin $n = \dfrac{m}{A} N_A$ atomi.

Obținem de aici relația de legătură dintre masa de nuclid de tip 2 rezultat în urma dezintegrării și masa de nuclid de tip 1 care se dezintegrează

$$\frac{m_{A_2}}{A_2} = \frac{m_{A_1}}{A_1} (1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

Ecuația generală a proceselor de dezintegrare se poate scrie sub forma

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y + {}^{A_2}_{Z_2}y$$

sau

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y + {}^{A_2}_{Z_2}y' + {}^{A_3}_{Z_3}y'' \text{ etc.}$$

unde $^{A}_{Z}X$ este nuclidul inițial, $^{A_1}_{Z_1}Y$ nuclidul rezultat în urma dezintegrării, iar y, y', y'' reprezintă particulele elementare, sau nucleele ușoare emise.

Conservarea numărului de nucleoni și a sarcinii nucleului ne conduce la scrierea legilor de conservare

$$A = A_1 + A_2$$
$$Z = Z_1 + Z_2.$$

Conservarea energiei totale ne permite să scriem relația

$$E_{0x} = E_Y + \Sigma E_y + \Sigma E_{\text{cinetic}}$$

iar conservarea impulsului

$$0 = \vec{p}_Y + \Sigma \vec{p}_y$$

în raport cu un sistem de referință legat de laborator.

Particula α fiind un nucleu de $^{4}_{2}\text{He}$ (număr de ordine 2, număr masic 4), iar particula β un electron (se scrie: $^{0}_{-1}\beta$ sau e, număr de ordine -1, număr masic 0), ecuațiile proceselor de dezintegrare pot fi particularizate sub forma „legilor" Soddy-Fajans

— prntru dezintegrarea α: $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\text{He}$ (sau α)

— pentru dezintegrarea β^-: $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta$ (sau e^-) $+ \bar{\nu}$

— pentru dezintegrarea β^+: $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}\beta$ (sau e^+) $+ \nu$

— pentru captura K: $^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e_K \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \gamma$.

(captura K se produce cînd un nucleu excitat capturează un electron de pe pătura K, suferind procesul de transformare descris de ecuația precedentă);

— pentru dezexcitarea γ: $^{A}_{Z}X^* \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$.

O succesiune de dezintegrări radioactive în cascadă (sau „legate genetic"), constituie o „serie" radioactivă.

b) *Reacții nucleare.* Reacțiile nucleare reprezintă procesele de interacție dintre nuclee și particule sau radiații electromagnetice, în urma cărora nucleele inițiale trec în alte nuclee, emițîndu-se totodată și o altă particulă (sau radiație electromagnetică de dezexcitare). Reacțiile nucleare pot fi clasificate în funcție de particula incidentă,

de produsele reacţiei, de energia de reacţie, randament etc. În funcţie de tipul particulei incidente deosebim :

— reacţii cu particule încărcate (cu protoni, cu particule α, cu deuteroni) ;

— reacţii provocate de neutroni, care pot fi : a) reacţii de activare (captură) (n, γ) ; de schimb (n, p) ; de împrăştiere etc. ;

— reacţii provocate de fotoni (fotonucleare).

Se numeşte *energie de reacţie* energia care se poate emite într-o reacţie nucleară. În cazul reacţiei $X(a, b)\ Y$, vom scrie pentru energia de reacţie

$$Q = [m_X + m_a - (m_Y + m_b)]\ c^2.$$

În cazul cînd $Q > 0$, se produce energie şi reacţia este exoenergetică ; în cazul cînd $Q < 0$, reacţia se numeşte endoenergetică, şi pentru a o produce este necesar un aport de energie pe care trebuie să-l aducă particula incidentă, numit energie de prag

$$W_{prag} = \frac{m + M}{M} |Q|,$$

unde m este masa particulei incidente (bombardantă), iar M este masa nucleului bombardat. La această valoare de prag a energiei cinetice, viteza relativă a particulelor rezultate din reacţie este nulă.

Într-o reacţie nucleară se conservă energia totală, impulsul, sarcina electrică, precum şi alte mărimi. Conservarea energiei se reflectă şi în legea conservării numărului de nucleoni : $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$, iar legea conservării sarcinii electrice totale, în legea conservării sumei numerelor de ordine : $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$.

* * *

6.1. Cît este masa unui atom de ^{203}Hg ?

6.2. Radiul suferă următoarea suită de transformări :

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn \rightarrow {}^{218}_{84}RaA \rightarrow {}^{214}_{82}RaB \rightarrow {}^{214}_{83}RaC \rightarrow {}^{214}_{84}RaC' \rightarrow {}^{210}_{82}RaD$$

Să se indice pentru fiecare transformare tipul de radiaţii emis.

6.3. Considerînd că viteza de dezintegrare radioactivă este proporţională cu numărul de atomi existenţi în acel moment, să se deducă legea dezintegrării radioactive.

6.4. Să se compare rezultatul problemei precedente cu rezultatele experimentale obţinute în cazul unei substanţe date, dacă intensitatea radiaţiei emise scade în timp conform datelor din tabloul de mai jos, determinîndu-se valoarea constantei λ (s-a notat cu R viteza de numărare indicată de un detector de radiaţii, exprimată în impulsuri pe minut).

t (zile)	iniţial	1	2	4	6	10	14	18	24	30
$R\left(\frac{imp}{min}\right)$	12 003	11 430	10 705	9 875	8 958	7 372	6 075	4 997	3 720	2 786

6.5. Să se determine constanta λ a unei substanţe radioactive ştiind că intensitatea radiaţiei emise de această substanţă (care trece într-un izotop stabil) scade cu circa 20% în timp de 90 min.

6.6. a) Să se determine relaţia de legătură dintre timpul de înjumătăţire $T_{1/2}$ şi constanta radioactivă λ. Folosind relaţia obţinută să se deducă apoi timpul de înjumătăţire corespunzător datelor de la problema 6.4 indicîndu-se ce nuclid (izotop radioactiv) ar putea fi izotopul studiat.

b) Să se calculeze constanta de dezintegrare a radiului ştiind că timpul său de înjumătăţire este $T_{1/2} = 1620$ ani.

c) Cîţi atomi de radiu se dezintegrează în timp de o secundă într-un gram de radiu pur ? Dar într-o zi ? Să se exprime cantitatea de radiu dezintegrată într-o zi, în grame.

d) Să se stabilească relaţia de legătură dintre viaţa medie şi timpul de înjumătăţire al unui nuclid radioactiv.

e) Fiind date constantele radioactive ale ^{238}U, ^{232}Th, ^{226}Ra şi ^{222}Rn ($\lambda = 4{,}872 \cdot 10^{-18}\,s^{-1}$; $1{,}58 \cdot 10^{-18}\,s^{-1}$; $1{,}355 \cdot 10^{-11}\,s^{-1}$ şi $2{,}099 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}$) să se calculeze timpii de înjumătăţire şi duratele medii de viaţă ale acestor nuclizi.

6.7. Izotopul $^{222}_{86}Ra$ are un timp de înjumătăţire de 3,825 d şi se dezintegrează prin emisie de particule α. Se cere :

a) Care este ecuaţia de dezintegrare ?

b) Cîte particule se emit într-o secundă, într-un gram ?

c) Dar într-o săptămînă ?

d) Care este energia particulei α emise, dacă ea produce într-o cameră Wilson umplută cu azot $3{,}8 \cdot 10^5$ perechi de ioni ?*

(Energia de ionizare a azotului este de 14,5 eV).

6.8. a) Cum variază în timp activitatea unei surse radioactive, ale cărei nuclee trec prin dezintegrare în nuclee stabile.

* Se neglijează pierderile de energie produse prin excitarea moleculelor de azot.

b) Care este activitatea totală și specifică a potasiului 40 conținut în corpul unui om de 60 kg, precum și numărul de particule emise de acesta în timp de un minut, dacă admitem că conținutul în potasiu al corpului uman este de 0,3%? Se consideră că abundența izotopică a izotopilor potasiului este: 93,10 % pentru ^{39}K, 0,0118% pentru ^{40}K și 6,8 % pentru ^{41}K, iar timpul de înjumătățire al ^{40}K este de $1{,}25 \cdot 10^9$ ani, ceilalți doi izotopi fiind stabili. Greutatea atomică a potasiului este 39,102. Izotopul ^{40}K emite radiații β în 89% din cazuri.

c) Să se calculeze activitatea specifică a plutoniului 239, știind că acest izotop are $T_{1/2}=24.360$ ani. Aceeași problemă pentru uraniul 235 care are $T_{1/2} = 8{,}5 \cdot 10^8$ ani.

6.9. Izotopul radioactiv ^{204}Tl are o perioadă de înjumătățire de 4,26 ani. Se cere:

a) Ce fracțiune din numărul inițial de nuclee rămîne nedezintegrată după 10 ani?

b) Care este activitatea* specifică a unei surse de taliu metalic dacă s-ar obține o sursă avînd toți atomii radioactivi? Să se exprime această activitate în Ci ($1\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ dez/s).

6,10. a) Să se scrie ecuația reacției nucleare de formare a nuclidului $^{32}_{15}P$ prin bombardarea $^{32}_{16}S$ cu neutroni.

b) Perioada de înjumătățire a izotopului $^{32}_{15}P$ este de 14,3 d; să se calculeze cîte nuclee de ^{32}P se dezintegrează într-o sursă de 200 Ci în decursul celei de a 5-a și a 6-a zi de la preparare?

c) Care este activitatea specifică a unei probe de ^{32}P pur?

d) Ce concentrație de atomi radioactivi se află într-o sursă de 1 Ci care cîntărește 40 mg?

6.11. Nucleele radioactive artificiale ^{32}P și ^{131}I au timpi de înjumătățire aproximați cu 14,3, respectiv 8 zile. Considerînd că în momentul inițial numărul de nuclee radioactive de iod este de două ori mai mare decît numărul de nuclee de fosfor, să se calculeze după cît timp numărul de nuclee rămase nedezintegrate se inversează. (Facultatea de Fizică — București, 1965).

6.12. Cîți atomi se dezintegrează într-o secundă într-un gram de radiu, dacă se ia $\lambda = 1{,}42 \cdot 10^{-11} s^{-1}$? Dacă admitem că la o dezintegrare se emit în medie 4 cuante (fotoni) gama, cîte cuante gama emise de ^{226}Ra trec în fiecare secundă printr-o suprafață de 1 cm^2 situată pe o sferă cu raza de 1 m, în centrul căreia a fost așezat preparatul radioactiv?

6.13. În sîngele unui animal de experiență a fost introdusă o soluție de ^{24}Na, avînd o activitate de 10^3 dez/s. Știind că după 2

* Prin activitate „specifică" se înțelege activitatea radioactivă pe unitatea de masă (Ci/g).

ore activitatea a 3 cm^3 de sînge este de 300 dez/s, iar perioada de înjumătățire a ^{24}Na este de 14,9 h, să se afle volumul sîngelui animalului de experiență. (Indicație: Volumul soluției introduse este neglijabil față de volumul sîngelui animalului). Se va presupune că în tot acest timp volumul sîngelui nu variază din alte cauze.

6.14. În păturile superioare ale atmosferei, sub acțiunea neutronilor din radiația cosmică, se generează în mod constant izotopul radioactiv ^{14}C ($T = 5570$ a) prin reacția $^{14}N(n, p)\ ^{14}C$. Între atmosferă și biosferă are loc un schimb continuu și constant de ^{14}C. După moartea substanței vii, schimbul încetează, iar din scăderea activității specifice a ^{14}C se poate determina timpul scurs de la moarte. Într-un caz particular, s-a măsurat activitatea specifică a carbonului provenit dintr-o substanță vie actuală, obținîndu-se $\Lambda_0 = 10{,}4$ dez/g·min și a radiocarbonului provenit dintr-un vestigiu arheologic dintr-un mormînt egiptean antic, găsindu-se: $\Lambda = 7{,}6$ dez/g·min; care este vechimea mormîntului?

6.15. Un gram din cenușa unui os găsit într-o săpătură arheologică produce cinci dezintegrări β pe minut. Știind că un gram din cenușa unui os actual produce 15 dezintegrări β pe minut și că timpul de înjumătățire al radiocarbonului $^{14}_6C$ este 5650 ani* se cere:

a) Vîrsta osului găsit în săpătură.

b) Ecuația reacției de dezintegrare a $^{14}_6C$ și viteza electronului emis, fiind dată energia cinetică a acestuia, de 156 keV. Se neglijează variația relativistă a masei cu viteza. Se dau: $\ln 3 \approx 1{,}09861$ și masa electronului $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

(Olimpiada de Fizică, 1966)

6.16. Știind că cele 4 serii radioactive sînt:

I) Seria $4n$, a toriului, care are ca nuclid inițial $^{232}_{90}Th$ și ca produs final $^{208}_{82}Pb$;

II) Seria $4n + 1$, a neptuniului, care are ca nuclid inițial $^{237}_{93}Np$ și ca produs final $^{209}_{83}Bi$;

III) Seria $4n + 2$, a uraniului, care are ca nuclid inițial $^{238}_{92}U$ și ca produs final $^{206}_{82}Pb$;

IV) Seria $4n + 3$, a actiniului, care are ca nuclid inițial $^{235}_{92}U$ și ca produs final $^{207}_{82}Pb$,

să se afle prin cîte dezintegrări α și β^- se ajunge în fiecare serie, de la produsul inițial, la cel final.

6.17. Nucleul de $^{59}_{27}Co$ captează un neutron și trece în radiocobalt, emițînd un foton gama. Radiocobaltul emite o particulă β cu energia de 0,3 MeV însoțită de doi fotoni gama cu energia de 1,25

* Timpul de înjumătățire al $^{14}_6C$ este determinat în prezent ca fiind egal cu 5660 ± 100 ani.

MeV; radiocobaltul are durata de înjumătățire de 5,3 a și trece într-un izotop al nichelului. Se cere:

a) Să se scrie ecuațiile nucleare și să se arate structura nucleului de radiocobalt. b) Să se determine timpul în care intensitatea radiației scade cu 25% c) Un foton gama emis de radiocobalt generează o pereche electron-pozitron, care au mase și energii egale*. Care este viteza fiecăreia dintre aceste particule neglijînd variația relativistă a masei. d) Cantitatea de căldură care se dezvoltă în 5,3 ore prin absorbirea integrală a electronilor și fotonilor emiși de 2 grame de radiocobalt.

(Olimpiada de Fizică, 1965)

6.18. Nucleul unui element absoarbe un neutron și emite un proton, trecînd în radionatriu $^{24}_{11}Na^*$. Acesta emite electroni cu energia de 1,4 MeV și are timpul de înjumătățire de 15 ore. Neutronii își ating ținta în proporție de 20%. Se cer:

a) ecuațiile reacțiilor nucleare care intervin și structura nucleului final;

b) numărul ionilor produși de o particulă β^- emisă într-o atmosferă de hidrogen, dacă energia de ionizare a acestuia este de 13,6 eV**;

c) variația de temperatură a 500 g apă care absoarbe integral radiațiile β^- emise de 3 mg radionatriu în timp de 1 minut;

d) radionatriul este utilizat la diagnosticarea unei boli în care scop se injectează în sîngele bolnavului 1 cm^3 soluție de radionatriu, care produce 2000 dezintegrări pe secundă. După 5 ore, 1 cm^3 din sîngele bolnavului produce 16 dezintegrări pe minut. Care este volumul sîngelui bolnavului?

e) care este numărul de neutroni necesari pentru a produce radionatriul folosit la injecție?

(Concursul de Fizică, etapa republicană, 1967)

6.19. Într-un minereu de uraniu, s-a găsit ca impuritate ^{206}Pb, care este de origine radiogenă, adică provine din dezintegrarea uraniului ($T = 4{,}5 \cdot 10^9$ ani). Știind că la 1 g de U existent inițial se găsesc astăzi 0,2 g Pb, să se calculeze vîrsta minereului. (Se va neglija prezența ^{235}U). Se poate folosi în acest caz scara liniară a timpilor radioactive?

6.20. Să se calculeze vîrsta unei roci terestre, dacă numărul de nuclee de ^{238}U, cu timpul de înjumătățire $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ ani, dezintegrate în decursul vremii dintr-un mol de uraniu conținut în roca radioactivă, este $n = 2{,}23 \cdot 10^{22}$.

* Întrucît un foton nu poate produce o pereche electron-pozitron decît în prezența unei alte particule, care preia obligatoriu o parte din impuls, se va admite că aceste transformări au loc pe nuclee, care preiau din impuls doar o fracțiune neglijabilă.

** Se neglijează pierderile de energie produse prin excitarea moleculelor de hidrogen.

6.21. În cazul cînd numărul de nuclee radioactive produs prin dezintegrarea nucleului-mamă rămîne constant, prin echilibrarea dinamică a procesului de producere cu cel de dezintegrare, se zice că s-a ajuns la starea de echilibru secular. Să se afle relația care caracterizează starea de echilibru secular și să se determine cu ajutorul acesteia:

a) Timpul de înjumătățire al uraniului natural (^{238}U) dacă în minereul natural există 1 atom de radiu la $2{,}78 \cdot 10^6$ atomi de uraniu (pentru radiu se va lua timpul de înjumătățire $T_{1/2} = 1620$ ani).

b) În uraniul natural se află $^{234}_{92}U$ în proporție de 0,006%. Cît este timpul de înjumătățire al acestui izotop?

c) Ce volum de radon (în condiții N.T.P*) se află în echilibru cu 1 gram de radiu? Cîți cm^3 de heliu se degajă dintr-un gram de radiu în timp de 1 an (condiții N.T.P.)? (Se va considera că activitatea radioactivă α a radiului aflat în echilibru cu produsele sale de dezintegrare este de 5 ori mai mare decît activitatea radiului izolat de acestea).

6.22. Preparatul RaD (izotopul $^{210}_{82}Pb$), aflat în echilibru secular cu produsele sale de dezintegrare, emite $3{,}7 \cdot 10^4$ particule β^- într-o secundă (1 μCi). Cîți atomi de RaD, RaE și Po sînt conținuți în preparat, dacă schema de dezintegrare este: RaD $\rightarrow$ RaE $\rightarrow$ Po? Cîte particule β^- emit în acest caz RaD și RaE în fiecare secundă? Se dau: $T_{RaD} = 22$ ani $\approx 6{,}94 \cdot 10^8$ s; $T_{RaE} = 5d = 4{,}32 \cdot 10^5$ s și $T_{Po} = 138{,}3$ d $\approx 1{,}2 \cdot 10^7$ s.

6.23. Energia radiațiilor emise de substanțele radioactive poate fi determinată și pe cale calorimetrică, introducînd preparatul radioactiv într-un calorimetru ai cărui pereți joacă rolul de ecran pentru radiație.

a) Să se calculeze energia totală eliberată la emisia unei particule α de nucleul atomului ^{213}Po, dacă energia cinetică a particulei α este de 8,34 MeV.

b) Ce cantitate de căldură degajă un gram de izotop ^{225}Ac (α — activ, $E_\alpha = 5{,}8$ MeV) într-un interval de timp egal cu durata medie de viață a izotopului respectiv. (Se neglijează aportul produselor secundare de dezintegrare).

c) Ce cantitate de căldură degajă o masă de 10 mg ^{222}Rn, avînd $T_{1/2} = 3{,}8$ zile, într-un timp de: 1) 1 secundă? 2) în timpul de înjumătățire $T_{1/2}$ (^{222}Rn emite particule α cu energia $W = 5{,}5$ MeV).

d) Ce energie au particulele α emise de ^{219}Po, dacă un preparat cu activitatea de 100 mCi, aflat într-un microcalorimetru avînd

* Adică la o temperatură de 0°C și presiunea de $1{,}01325 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$:

capacitatea calorică de 2,3 $\frac{\text{cal}}{^0\text{C}}$, ridică temperatura acestuia în decurs de o oră cu 1,175°C?

6.24. Energia cinetică a unei particule α, care este emisă de un nucleu de radiu, în dezintegrarea radioactivă este 4,78 MeV. Să se determine: a) viteza particulei α; b) energia totală dezvoltată în timpul scăpării particulei α.

Se dă masa particulei $\alpha = m_\alpha \approx 4{,}0006$ u.

6.25. La dezintegrarea nucleului de plutoniu ^{239}Pu se emite o particulă alfa cu energia $W = 5{,}3$ MeV. Știind că timpul de înjumătățire al plutoniului este $T = 24\,000$ ani, să se calculeze cantitatea de căldură degajată de o cantitate $m = 15$ g de preparat într-un interval de timp $t = 1$ an numai prin dezintegrări α.

6.26. Un preparat dintr-o substanță radioactivă este pus într-un calorimetru de capacitate calorică 16,75 J/°C. Cu cît crește temperatura în 10 ore, dacă preparatul are o activitate de $7{,}4 \cdot 10^9$ dez/s (0,2 Ci) și emite particule α având o energie de 5,3 MeV? a). Cînd nu se ține seama de energia de recul a nucleelor care se dezintegrează. b) Cînd se ține seama și de această energie, pentru ^{210}Po.

6.27. Izotopul ^{32}P (fosfor) emite numai radiații având energia de 1,7 MeV; să se calculeze cantitatea de ^{32}P necesară pentru a elibera un debit de căldură de 10 W, dacă toată energia eliberată se transformă în căldură, iar perioada de înjumătățire a ^{32}P este 14,3 zile*.

(Facultatea de Fizică — Timișoara, 1963)

6.28. În multe cazuri, este necesară prepararea unor substanțe radioactive (de obicei soluții) având o anumită activitate sau activitate specifică, pornind de la un alt preparat radioactiv.

a) Cîte grame de stronțiu-90 radioactiv, trebuie adăugat la 2,2g de stronțiu stabil, pentru a obține un preparat cu activitate specifică de 1 mCi/g? Cît trebuie să adăugăm în cazul cînd activitatea preparatului radioactiv este de 500 mCi/g? (Se dă T (^{90}Sr) ≈ 28 ani).

b) Prin injectare, s-a introdus în sîngele unui animal de experiență 1 cm^3 de soluție radioactivă conținînd ^{24}Na, cu o activitate totală de 4 000 dez/s. Activitatea unui centimetru cub de sînge, înregistrată după 3 ore, a fost de 50 dez/s. Știind că timpul de înjumătățire al ^{24}Na este de 15 ore, să se afle volumul ocupat de sîngele animalului de experiență.

c) Ce fracțiune din volumul de solvent trebuie evaporat dintr-o soluție radioactivă, pentru ca o soluție avînd inițial o activitate

* Determinări mai recente indică $T(^{32}\text{P}) = 14{,}5$ d.

volumică de 6.000 dez/s · cm^3, să atingă activitatea specifică de 19.000 $\frac{\text{dez/s}}{\text{cm}^3}$? Cît solvent trebuie evaporat dintr-un litru de soluție?

6.29. Din nucleele unui nuclid A, prin dezintegrare se formează nuclee ale altui nuclid B, de asemenea radioactiv. Constanta radioactivă a nuclidului A este λ_A, iar a nuclidului B este λ_B.

a) Care este legea de variație în timp a numărului de nuclee de tip B, dacă preparatul conținea inițial numai N_{0A} nuclee de tip A?

b) Care este momentul în care numărul de nuclee de tip B este maxim?

6.30. Radioizotopul RaA (izotopul $^{218}_{84}$Po) se dezintegrează cu un timp de înjumătățire $T_A = 3$ minute, formînd RaB (izotopul $^{214}_{82}$Pb) care se dezintegrează la rîndul său cu un timp de înjumătățire $T_B = 27$ minute. Presupunînd că în momentul inițial preparatul conținea doar RaA, să se determine intervalul de timp după care cantitatea de RaB atinge un maxim.

6.31. Se consideră o succesiune de două dezintegrări radioactive $A \to B \to C$ și se presupune că $\lambda_A \ll \lambda_B$. Să se arate că după un timp mult mai mare decît durata medie de viață a celor mai stabile nuclee, raportul dintre cantitatea de element A și cea de element B, rămîne constant în timp (echilibrul secular).

6.32. Să se calculeze masa nucleului de $^6_2$He. Se va considera că energia de legătură a nucleului $^6_2$He este W = 29,27 MeV.

6.33. a) Să se arate că $^{64}_{29}$Cu se poate dezintegra prin emisie β^-, emisie β^+ sau captură electronică indicîndu-se nuclizii și particulele elementare produse.

Să se calculeze energiile de reacție pentru cele trei procese.

b) Să se exprime energiile de reacție în funcție de defectele de masă ale nucleelor implicate. Se dau: $M_Z = 63{,}92976$ u; $M_{Z+1} = 63{,}92915$ u; $M_{Z-1} = 63{,}92796$ u.

6.34. Știind că nucleul izotopului $^{212}_{84}$Po emite o particulă α, iar nucleul ce se formează emite o particulă β^- (electron), se cere să se indice schemele de dezintegrare și să se calculeze energiile particulei α și β^-.

(Gazeta de Matematică și Fizică-B 1559, nr. 2/1955)

6.35. Cît timp este necesar pentru ca activitatea unei probe de radiu să se reducă la $\frac{1}{8}$ din valoarea inițială? ($T_{1/2} = 1\,620$ ani).

(Gazeta de Fizică și Chimie-B 1150, nr. 12/1956)

6.36. Un miligram de radiu emite $3{,}7 \cdot 10^7$ particule α pe secundă. Care este constanta de dezintegrare λ a radiului, știind că numărul de masă al radiului este 226?

(Gazeta de Fizică și Chimie-B 894, nr. 6/1966)

6.37. Izotopul β^- activ ^{90}Sr are timpul de înjumătățire $T = 28$ ani.

a) Ce fracțiune din cantitatea inițială de nuclee rămîne nedezintegrată după 10 ani?

b) Respectiv după 100 ani?

c) Ce valoare are constanta de dezintegrare?

d) Ce activitate mai are o sursă de 100 mCi după 100 ani?

e) Cîte nuclee mai rămîn nedezintegrate într-o sursă de 100 mCi după 100 ani?

6.38. Știind că izotopul ^{224}Ra emite particule alfa, să se calculeze în cît timp se va colecta 1 cm^3 de heliu, la presiune și temperatură normale, știind că cantitatea inițială de izotop radioactiv este de 1 g, iar $\lambda = 2{,}21 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$.

(Compendiu de Fizică, Ed. Științifică, 1971)

6.39. Cîți mm^3 de He se degajă prin dezintegrarea unui gram de radiu, în timp de 1 an, dacă nu se ține seama de dezintegrările ulterioare?

6.40. Să se calculeze cantitatea de plumb care apare în urma dezintegrării unei mase $M_U = 1$ kg de ^{238}U pur, în decursul unui interval de timp $t = 2{,}5 \cdot 10^9$ ani, dacă timpul de înjumătățire al izotopului ^{238}U este $T_U = 4{,}5 \cdot 10^9$ ani. (Seria uraniu-radiu).

6.41. Care este vîrsta unui minereu de uraniu care conține 15% ^{206}Pb?

6.42. a) Cît rămîne dintr-un preparat de 0,5 g radiu după 50 de ani?

b) Dacă se neglijează produsele secundare de dezintegrare, ce energie s-ar degaja, în cazul cînd degajarea ar fi instantanee? Se va admite că ^{226}Ra emite numai particule α avînd energia de 4,78 MeV; în cazul cînd se ține seama și de produsele de dezintegrare, se va considera că activitatea radioactivă este de 5 ori mai mare decît activitatea radiului singur.

Se dau: $W_\alpha\,(^{222}_{86}Ra) = 5{,}5$ MeV, $W_\alpha\,(^{218}_{84}Po) = 6$ MeV,

$W_{\beta\,max.}\,(^{214}_{82}Pb) = 0{,}78$ MeV, $W_{\beta\,max.}\,(^{214}_{83}Bi) = \begin{cases} 3{,}17 \text{ MeV } (\approx 77\,\%) \\ 1{,}65 \text{ MeV } (\approx 23\,\%) \end{cases}$

6.43. Care este viteza particulei α și a nucleului de radon, produs la dezintegrarea unui atom de radiu? (Calculul se va face nerelativist pornind de la conservarea energiei totale și a impulsului).

6.44. a) Ce cantitate de radon ($T_{Rn} = 3{,}825$ d) se află în echilibru secular cu 1 μCi de radiu?

b) Cît heliu se formează în 10 ani în 3 g de Ra?

6.45. Care a fost activitatea inițială a unui preparat de ^{32}P dacă după 5 zile acesta prezenta o activitate de 1 μCi? Cîte particule β a emis preparatul în decursul celor 5 zile? Ce cantitate în grame corespunde activității de 1 Ci? (Se dă $T_P = 14{,}5$ zile).

6.46. Care este viteza inițială, calculată nerelativist, a unei particule α care formează într-o cameră cu ceață 200 000 perechi de ioni, dacă energia de ionizare a vaporilor din cameră este de circa 33 eV?

6.47. Ce curent mediu trece printr-un detector de particule în care se produc 600 descărcări pe minut, dacă la o descărcare se produc circa 10^6 perechi de ioni?

6.48. Cîte perechi de ioni poate produce în aer o particulă α avînd o energie de 4,4 MeV, dacă la un act de ionizare se consumă circa 34 eV și particula α își consumă 98% din energie în acte de ionizare?

6.49. Ce curent produc mezonii din radiația cosmică, într-o cameră de ionizare cu raza de 20 cm, cu înălțimea de 30 cm și așezată vertical, dacă un mezon produce în medie 38 perechi de ioni pe fiecare parcurs de 1 cm străbătut în aer, iar fluxul de mezoni din radiația cosmică la nivelul mării este de circa 1 mezon/$cm^2 \cdot s$. (Colectarea sarcinilor se face cu o eficiență de practic 100%).

6.50. Numărul de perechi de ioni formați de particulele α și de protoni într-un strat de aer cu grosimea de un cm și densitatea de 1,3 kg/m^3 este dat în literatură sub forma tabelului de mai jos:

Energia (MeV)	0,2	0,1	1	1,5	2	4	6	10	25	100
Particule α	40 000	56 000	54 000	46 000	41 000	26 000	20 000	13 000	6 500	2 200
Protoni	16 000	11 000	6 500	5 100	4 400	2 400	1 700	1 100	580	180

$W_{ionizare\ aer} = 34$ eV

a) Care este curentul produs prin ionizare de un flux de particule care introduce în cameră n particule în unitatea de timp, fiecare particulă avînd energia W_p, dacă se presupune că toată energia fasciculului este consumată într-un detector pentru a produce ionizări, energia de ionizare a gazului din detector fiind W_i, și se admite ca toți ionii formați sînt colectați la cei doi electrozi ai camerei, înainte ca să se producă recombinarea lor?

b) Ce curent produce într-o cameră de ionizare un flux incident de particule α, de 20 particule/s, care își consumă toată energia în detector (sursa se află chiar în interiorul detectorului), dacă particulele au o energie de 4 MeV, iar camera de ionizare lucrează deschis în aer, la presiunea atmosferică, în condiții N.T.P.? (Camera are dimensiuni mari față de parcursul particulelor α în aer).

c) Cît este parcursul masic * și liniar al acestor particule în aer? Experimental se obține: $R = 3{,}25$ mg/cm^2 aer; care este cauza discrepanței cu valoarea calculată? Se va lua $\rho_{aer} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3.

d) Cît este parcursul unor protoni de 4 MeV în aer N.T.P.? Să se compare cu parcursul particulelor α de aceeași energie.

e) Care este energia protonilor ce au practic același parcurs cu particulele α de 4 MeV?

6.51. a) Care este energia unei particule α având un parcurs de 6,3 cm în aerul cu vapori de alcool dintr-o cameră Wilson, dacă pentru formarea unei perechi de ioni în aer este necesară o energie de 34 eV, iar din grosimea urmei particulei α într-o cameră Wilson s-a aproximat că se formează circa 25 000 perechi de ioni pe cm de parcurs?

b) Corespunde acest rezultat pentru energie cu cel calculat pornind de la faptul că un cîmp de 0,7 T aplicat perpendicular pe traiectoria particulei α produce o curbură a traiectoriei cu raza de 48 cm?

Se dă $m_\alpha = 4{,}0006$ u. Particula este considerată nerelativistă.

c) Să se compare parcursul măsurat cu cel în aer uscat N.T.P.

6.52. Într-un spectrometru de masă un fascicul de ioni de bor, o dată ionizați, este accelerat sub o tensiune de 1600 V; fasciculul se deplasează într-un plan perpendicular pe direcția liniilor de forță ale unui cîmp magnetic de 0,1 T. Dacă razele de curbură ale celor două traiectorii observate prin procedeul camerei cu ceață sînt de 18,26 și 19,10 cm, să se calculeze masele acestor nuclizi în unități atomice de masă (u) și să se compare cu valorile indicate în literatură ($M_{^{10}B} = 10{,}013$ u și $M_{^{11}B} = 11{,}009$u). (Se reamintește că 1 u reprezintă a douăsprezecea parte a masei unui atom de $^{12}_{6}C$; rezultă: $1\text{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg)

6.53. Cîți protoni și cîți neutroni se află într-un atom-gram de He? Dar de $^{235}_{92}U$? Se va lua numărul lui Avogadro: $N_A = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ atomi/atom gram.

6.54. Raza unui nucleu de masă A poate fi exprimată prin relația aproximativă: $R = r_0 \cdot A^{1/3}$, unde $r_0 \approx 1{,}3 \cdot 10$ m**

* Prin „parcurs masic" se înțelege produsul densității cu parcursul geometric: $\rho x = R$.

** Mult timp s-a considerat $r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-15}$ m.

a) Dacă se consideră că fiecare nucleon participă cu un același volum v_0 la constituirea volumului unui nucleu, să se calculeze valoarea acestui volum v_0; să se aprecieze apoi densitatea medie a materiei (substanței) nucleare, admițînd că în nucleu $M_{nucleon} \approx 1$u.

b) Nucleul $^{8}_{4}Be$ care rezultă din unele reacții nucleare este foarte nestabil, fisionînd în două nuclee de $^{4}_{2}He$; care este variația de „volum nuclear" produsă în această transformare?

c) Două nuclee de $^{6}_{3}Li$ fuzionează, formînd un atom de $^{12}_{6}C$; se face vreo eroare la calculul razei nucleului de carbon obținut dacă se consideră că volumele celor două nuclee de litiu se compun aditiv? Cît sînt razele celor două nuclee?

6.55. Într-un nucleu, nucleonii ocupă volume aproape egale între ele; dacă admitem că volumul ocupat de un nucleon în nucleu este de circa $9{,}2 \cdot 10^{-45}$ m^3, să se calculeze densitatea substanței nucleare: a) pentru heliu; b) pentru deuteriu; c) pentru fier-59; d) densitatea fierului fiind $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3, să se calculeze apoi de cîte ori este mai dens nucleul de fier decît atomul de fier.

6.56. a) Să se afle expresia energiei de legătură a unui nucleon în nucleu, adică lucrul mecanic care ar trebui efectuat pentru a scoate acel nucleon din nucleu, fără a-i comunica vreo energie cinetică.

b) Care este energia de legătură a nucleului de $^{9}_{4}Be$? Dar a celui de $^{2}_{1}H$?

c) La ce pierdere de energie revine pierderea unei unități atomice de masă în scara fizică? Ce deosebire este între cele două scări de masă, chimică și fizică?

d) Cînd este stabil un nucleu față de o dezintegrare dată? Să se exemplifice pe cazul reacției $^{7}_{3}Li \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{3}_{1}H$ și cazul $^{8}_{4}Be \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He$.

Se dau: $m_p = 1{,}00759$ u; $m_n = 1{,}00898$ u; $m_{Be} = 9{,}01503$ u; $m_D = 2{,}01474$ u*.

6.57. Să se calculeze energia minimă care trebuie cheltuită pentru a extrage un proton, respectiv un neutron din nucleul $^{4}_{2}He$. Să se explice de ce rezultatele diferă. Se cunosc *

$$m_p = 1{,}00759 \text{ u}; \quad m_n = 1{,}00893 \text{ u}.$$

$$m_{H_3} = 3{,}01700 \text{ u}; \quad m_{He} = 4{,}00381 \text{ u}.$$

6.58. Prin mijloacele spectrometriei de masă au fost determinate următoarele mase nucleare **:

Pentru: $^{56}_{26}Fe$: $55{,}93493 \pm 0{,}000004$ u

$^{108}_{46}Pd$: $107{,}90389 \pm 0{,}00001$ u

* Masele au fost indicate în scara chimică (O=16).

** Masele au fost indicate în scara fizică (C-12).

$^{144}_{60}$Nd : 143,91004 $\pm$ 0,00002 u
$^{195}_{78}$Pt : 194,96482 $\pm$ 0,00002 u
$^{238}_{92}$U : 238,04391 $\pm$ 0,00002 u.

Să se determine defectul de masă, energia de legătură şi energia de legătură per nucleon pentru aceste nuclee. Se dau :

$$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-24} \text{ g} \Rightarrow 938{,}26 \text{ MeV}$$

$$m_n = 1{,}67492 \cdot 10^{-24} \text{ g} \Rightarrow 939{,}55 \text{ MeV}.$$

Echivalentul energetic al lui u : 931,48 MeV.

6.59. Să se exprime în grame, respectiv kg, unitatea atomică de masă. Să se afle apoi corespondentul în energie (J, respectiv MeV) al acestei mase.

6.60. Să se calculeze echivalentul unui eV în J, erg, cal, kWh şi kg·m. Să se compare apoi valorile obţinute cu energia produsă prin arderea unui kilogram de huilă, avînd puterea calorifică $q = 8000 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

6.61 a) Cu prilejul fisiunii unui nucleu de ^{235}U se eliberează o energie de circa 200 MeV ; ce cantitate de cărbune brun eliberează prin ardere o cantitate de energie egală cu energia eliberată la fisiunea unui atom-gram de ^{235}U ? (Se va admite că puterea calorifică a cărbunelui este : $q = 8000 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$).

b) Ce cantitate de energie s-ar putea obţine dintr-un gram de substanţă dacă masa substanţei s-ar putea transforma complet în energie.

6.62. Să se calculeze masa unui atom al cărui nucleu emite o particulă α cu energie de 5,3 MeV, transformîndu-se în nucleul $^{206}_{82}$Pb. Masele atomilor $^{4}_{2}$He şi $^{206}_{82}$Pb sînt egale, respectiv cu 4,00387 şi 206,03859 u.

(Admitere, Facultatea de Chimie, 1965)

6.63. Să se completeze următoarele ecuaţii ale reacţiilor nucleare înlocuind nuclidul sau particula notată cu X cu cea corespunzătoare :

$^{1}_{1}$H$(n,\gamma)X$
$^{2}_{1}$H $(n, \gamma)X$
$^{6}_{3}$Li$(p,n)X$
$^{11}_{5}$B$(d,\alpha)X$
$^{12}_{6}$C$(d, n)X$
$^{14}_{7}$N$(\alpha, p)X$
$^{11}_{5}$B$(\gamma,X)^{8}_{4}$Be
$^{12}_{6}$C$(X, \alpha)^{8}_{4}$Be
^{56}Mn$(n,\alpha)X$

$^{7}_{3}$Li$(p, n)X$
$^{9}_{4}$Be$(p,d)X$
$^{9}_{4}$Be$(d, p)X$
$^{9}_{4}$Be $(p,\alpha)X$
$^{58}_{28}$Ni$(p,n)X$
I$(\alpha, n)X$
$^{15}_{7}$N$(p,\alpha)X$
$^{16}_{8}$O$(d,\alpha)X$
$^{16}_{8}$O$(d, n)X$
$^{27}_{13}$Al$(n, \alpha)X$
$^{31}_{15}$P$(d,p)X$
$^{63}_{29}$Cu$(p,n)X$
I$(n,p)X$
Cr$(\alpha,p)^{56}$Mn
^{56}Mn$(\alpha, p)X$
$^{59}_{27}$Co$(n, X)^{60}_{27}$Co
$^{115}_{49}$In$(n,X)^{115}_{48}$Cd
$^{31}_{15}$P$(\gamma, n)X$
$^{26}_{12}$Mg$(n,\alpha)X$

(În aceste cazuri se vor considera diferiţii izotopi ai I şi Cr), (De exemplu I are izotopii : $^{118}_{53}$I...$^{139}_{53}$I).

La fel, pentru reacţiile nucleare de foarte mare energie „cu evaporare de neutroni" : I$(p, 5n)$X ; I$(p, 6n)$X ; I$(p, 7n)$ X, se vor scrie reacţiile corespunzătoare.

6.64. *Determinarea energiei de reacţie.* Energia de reacţie se poate determina direct dacă se cunosc energia totală E_1 a particulei care provoacă reacţia şi energiile E_2 şi E_3 ale produselor de reacţie

$$Q = (E_2 + E_3) - E_1 - E_0$$

unde E_0 este energia ţintei.

a) Să se determine energia reacţiei

$$^{14}_{7}\text{H} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{1}_{1}\text{H} + ^{17}_{8}\text{O}$$

dacă ni se dau masele (în scara chimică) :

$m_N = 14{,}00751$ u ; $m_O = 17{,}00450$ u

$m_{He} = 4{,}00390$ u ; $m_H = 1{,}00812$ u.

b) Să se compare energia care intervine în această reacţie endotermă, cu energia care se obţine în reacţia chimică ; $H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow H_2O + 70 \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$. Aceeaşi problemă pentru reacţia : $^{7}_{3}$Li $+ ^{1}_{1}$H $\rightarrow 2\ ^{4}_{2}$He.

6.65. *Determinarea energiei de reacţie* în sistemul de referinţă al laboratorului.

Pentru producerea reacţiei este importantă energia cinetică totală a celor două particule care intră în reacţie, în sistemul de referinţă nucleu-ţintă, şi nu energia cinetică a nucleului bombardant faţă de un sistem „imobil". În funcţie de această energie

totală definită în sistemul centrului de inerție, să se determine energia totală în sistemul laboratorului.

Se face convenția ca: sistemul „imobil" = sistemul laboratorului,
sistemul „mobil" = sistemul centrului de masă.

Care este energia minimă a particulei α, necesară pentru a produce reacția: $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$?

6.66. După cum am arătat în problema: „Determinarea energiei de reacție", în urma reacției $m + M \rightarrow m' + M'$ energia de prag a particulei m, necesară pentru declanșarea reacției, se determină cu formula: $W_{\text{prag}} = \dfrac{m + M}{m} |Q|$, unde Q este energia de reacție.

Aplicație: Să se afle energia de prag W_{prag}, necesară pentru ca particulele α cu care se bombardează o țintă de $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ în repaus, să declanșeze reacția: $^{7}_{3}\mathrm{Li}\,(\alpha, n)\,{}^{10}_{5}\mathrm{B}$. Se dau: $m_{\mathrm{Li}} = 7{,}01600$ u, $m_{\mathrm{B}} = 10{,}01294$ u.

6.67. Să se calculeze energia de reacție a reacției nucleare: $^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, plecînd de la energiile de legătură per nucleon în nucleele de $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ (5,61 MeV) și $^{4}_{2}\mathrm{He}$ (7,06 MeV).

6.68. Masa atomică a tritiului $^{3}_{1}\mathrm{H}$ este egală cu 3,01605 u, iar cea a $^{3}_{2}\mathrm{He}$ este de 3,01603 u. Să se afle defectele de masă și energiile de legătură pentru cei doi izotopi, să se compare rezultatele obținute și să se arate cauza acestei deosebiri.

6.69. Un nucleu de $^{11}_{6}\mathrm{C}$ emite un pozitron cu energie maximă. Să se calculeze energia cinetică a nucleului de recul.

(Problemă propusă în culegerea; Irodov „Probleme de fizică atomică" la nr. 12.46)

6.70. a) Să se calculeze energia de legătură per nucleon a nucleului $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

b) Dacă acest nuclid fisionează, producîndu-se nuclizi a căror energie medie per nucleon este de 8,4 MeV, ce energie se eliberează (aproximativ) într-un act de fisiune? (Se va lua $m_{\mathrm{U}} = 238$ u).

6.71. a) Cîte fisiuni trebuie să se producă în unitatea de timp, într-un reactor nuclear cu uraniu, pentru a menține constant nivelul puterii unui reactor de 100 MW?

b) Cît $^{235}\mathrm{U}$ sau $^{239}\mathrm{Pu}$ fisionează într-o bombă atomică, „clasică", echivalentă cu 20 kilotone trotil (trinitrotoluen)? Se va admite că la o fisiune se produc circa 200 MeV, iar echivalentul termic (puterea calorică) al trotilului este $J_{\mathrm{T}} = 4{,}18 \cdot 10^{6} \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ *.

6.72. $^{232}_{92}\mathrm{U}$ emite particule α conform reacției

$$^{232}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{228}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Se cunosc: $M \equiv M_{\mathrm{U}} = 232{,}0372$ u; $M' \equiv M_{\mathrm{Th}} = 228{,}0287$ u; $m \equiv m_{\alpha} = 4{,}0006$ u. Să se calculeze:

a) energia de reacție;

b) energiile cinetice ale particulei α emise și energia de recul a nucleului de thoriu.

6.73. În reacțiile termonucleare de mai jos:

1) $^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \rightarrow \begin{cases} \longrightarrow (^{3}_{1}\mathrm{T} + 1{,}0\ \mathrm{MeV}) + (^{1}_{1}p + 3{,}0\ \mathrm{MeV}) \\ \longrightarrow (^{3}_{2}\mathrm{He} + 0{,}8\ \mathrm{MeV}) + (^{1}_{0}n + 2{,}45\ \mathrm{MeV}) \end{cases}$

2) $^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{3}_{1}\mathrm{T} \rightarrow (^{4}_{2}\mathrm{He} + 3{,}6\ \mathrm{MeV}) + (^{1}_{0}n + 14{,}1\ \mathrm{MeV})$

energiile puse în libertate și purtate de diferitele produse ale reacției sînt indicate în dreptul fiecăruia dintre acestea.

a) Ce energie se poate produce prin reacția completă a doi atomi-gram de deuteriu sau a unui mol de deuteriu și a unuia de tritiu? Să se verifice energiile globale obținute cu datele indicate în enunț.

b) Să se compare energiile indicate cu energia eliberată la fisiunea unei cantități corespunzătoare de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ (1 g U față de 1 g de D). (Se va considera că la un act de fisiune se obține o energie de 200 MeV, iar reacțiile se realizează în proporție de 100%).

6.74. Să se calculeze energiile care intervin în următoarele reacții:

a) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} = 2\ {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

b) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{0}n = {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H}$.

c) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} = 2\ {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n$.

* Variantă a problemei 12.87 propusă de I. E. Irodov.

Se dau : $m_{Li} = 6{,}01702$ u ; $m_1^2H = 2{,}01474$ u ; $m_1^3H = 3{,}01700$ u ; $m_n = 1{,}00898$ u (scara chimică).

6.75. Ciclul lui Bethe constă din fuziunea a patru protoni, într-un atom de heliu ; ciclul începe prin captarea unui proton de către un nucleu de $^{12}_{6}C$; urmează dezintegrarea β^+ a nuclidului de $^{13}_{7}N$ format, captura unui nou proton de către $^{13}_{6}C$, apoi captura unui proton, de către nuclizii $^{14}_{7}N$, dezintegrarea β^+ a nuclidului $^{15}_{8}O$ și o nouă captură în $^{15}_{7}N$; în urma ultimei reacții se produce nucleul de heliu care ne interesează, regenerîndu-se nuclidul de $^{12}_{6}C$. a) Să se scrie explicit etapele ciclului Bethe.

b) Ce energie se eliberează la sinteza unui gram de heliu prin ciclul lui Bethe? Ce cantitate de cărbuni cu puterea calorifică de 8000 kcal/kg are trebui să ardem pentru a produce aceeași cantitate de căldură?

c) Considerînd că 1 kg de $^{6}_{3}Li$ reacționează în întregime cu tritiul, să se calculeze energia degajată. Să se compare cu energia degajată de explozia trinitrotoluenului, știind că pentru acesta căldura per kilogram explodat este 1010 kcal/kg. Se cere cantitatea echivalentă de trinitrotoluen (trotil).

6.76. Ciclul proton-proton (Critchfield) începe prin combinarea a 2 protoni, cu formarea unui deuteron și emisia unui pozitron și a unui neutrin. El continuă prin sinteza unui proton cu un deuteron, în urma căruia apare un nucleu de $^{3}_{2}He$ și este emis un foton. În final, prin fuzionarea a două nuclee de $^{3}_{2}He$ se produc $^{4}_{2}He$ și doi protoni.

a) Să se scrie etapele ciclului Critchfield.

b) Să se calculeze energia totală eliberată.

6.77. Presupunînd că numai 0,0005% din fasciculul de neutroni care bombardează o țintă de $^{12}_{6}C$ produc reacții de tipul

$$^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{13}_{6}C$$

dezvoltîndu-se o căldură totală de 4180 J, să se calculeze numărul de neutroni din fasciculul inițial dacă se cunoaște :

$$m_{^{12}C} = 12 \text{ u} ; \quad m_{^{13}C} = 13{,}00335 \text{ u} ; \quad m_n = 1{,}00866 \text{ u}.$$

6.78. Fotoni cu energia $\varepsilon = 2{,}62$ MeV dezintegrează deuteronii în protoni și neutroni. Protonii sînt observați într-o cameră Wilson aflată într-un cîmp magnetic transversal de inducție $B = 0{,}4$ T, în care raza de curbură a traiectoriei lor este $R = 15$ cm. Se consideră $m_p = 1{,}00728$ u, $m_n = 1{,}00866$ u. Un proton emis în această dezintegrare poate dezintegra un nucleu de $^{7}_{3}Li$ aflat în repaus spărgîndu-l în două particule α, avînd energii cinetice egale. Se cer :

a) ecuațiile reacțiilor nucleare ce se produc ;

b) energia de legătură a deuteronului ;

c) energia cinetică a unei particule α emise ;

d) numărul de protoni necesari pentru a obține $V = 8{,}3$ cm³ de He la $t = 27°C$ și $p = 10 \dfrac{N}{m^2}$, dacă ei ating ținta în proporție de $\eta = 10\%$.

Se dau : $m_{Li} = 7{,}0160$ u ; $m_\alpha = 4{,}0006$ u ; $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ molecule/mol ; $R = 8{,}31$ J/mol·°K.

6.79. O particulă α emisă de radon ($^{222}_{86}Rn$) are energia cinetică de 5,5 MeV. Se cere :

a) să se scrie ecuația reacției ;

b) energia totală eliberată la emisia particulei α ;

c) viteza nucleului rezidual după reacție.

6.80. În urma unei ciocniri elastice cu o particulă aflată inițial în repaus, un proton este deviat cu un unghi $\varphi = 60°$, iar particula cu un unghi $\theta = 30°$ față de direcția de incidență a protonului. Care este masa particulei care a produs deviația? (Se va lucra în sistemul de referință al laboratorului).

6.81. O particulă cu energia cinetică E_1 și număr de masă A_1 ciocnește un nucleu ce se află în repaus. După ciocnire, particula eliberată are energia cinetică E_2, traiectoria sa face un unghi θ cu direcția inițială de mișcare și are masa atomică A_2. Masa atomică a nucleului nou format fiind A_3, să se calculeze energia de reacție.

6.82. Să se calculeze vitezele nucleelor produse în reacția chimică :

$$^{1}_{0}n + {}^{10}_{5}B \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{7}_{3}Li,$$

neutronul care o provoacă fiind un neutron termic* ; nucleul $^{10}_{5}B$ se află inițial în repaus. Se cunosc : $m_n = 1{,}00866$ u ; $m_B = 10{,}01294$ u ; $m_{He} = 4{,}0026$ u ; $m_{Li} = 7{,}01600$ u.

6.83. Energia reacției exoterme : $^{9}_{4}Be(\alpha, n)\,^{12}_{6}C$ este $Q = 5{,}7$ MeV. Să se determine energia cinetică a neutronilor emiși sub un unghi de 90° față de direcția de mișcare a particulelor α. Particulele α care produc reacția sînt produse de o sursă cu ^{210}Po ($W_\alpha = 5{,}3$ MeV). Se dau : $m_n = 1{,}00866$ u ; $m_\alpha = 4{,}0006$ u ; $m_C = 12$ u.

---

* Adică un neutron a cărui energie este egală cu 0,025 eV.

6.84. *Obținerea radioizotopilor. Iradierea cu neutroni. Analiza prin activare.*

1) Să se stabilească relația care ne dă numărul de nuclee radioactive produse la iradierea cu neutroni termici a unei cantități dintr-un izotop dat, dacă admitem că:

a) Numărul de nuclee radioactive produse este proporțional cu intensitatea fluxului de neutroni și cu numărul de nuclee N_0, existente în proba iradiată.

b) Numărul de nuclee radioactive formate într-un interval foarte scurt de timp dt este proporțional cu durata acestui interval de timp.

c) Nucleele radioactive formate se dezintegrează în timp conform legii exponențiale de dezintegrare radioactivă.

2) Să se exprime rezultatul obținut în $\frac{\text{Ci}}{\text{g}}$, calculînd activitatea specifică maximă care se poate obține pentru ^{60}Co, iradiind ^{59}Co (care constituie 100 % din cobaltul natural) cu un flux de $2 \cdot 10^{13}$ n/cm$^2 \cdot$ s, știind că secțiunea eficace* de activare a cobaltului cu neutroni termici este de 37 barni. Se dă T (^{60}Co) $\approx 5{,}3$ ani.

3) Să se reprezinte variația în timp a activității ^{24}Na obținut prin reacția ^{23}Na $(n, \gamma) \rightarrow {}^{24}_{11}$Na, cu $\sigma_{act} \approx 0{,}5$ barni, (σ_{act} = secțiunea eficace de activare), comparînd-o cu curba de dezintegrare în timp a unei cantități de sodiu-24 radioactiv, care conține la momentul $t = 0$ același număr de nuclee radioactive pe care l-ar conține sodiul iradiat cu neutroni, după un timp infinit de iradiere.

6.85. În problema precedentă, iradierea elementului de activat se face în mod continuu. În realitate, reactorii experimentali funcționează ritmic, un anumit număr de ore în fiecare zi.

a) Cum trebuie corectată pentru acest caz relația precedentă?

b) Ce activitate masică se va obține pentru ^{60}Co, în condițiile problemei precedente, dacă reactorul funcționează numai 8 ore pe zi, după 1 an? Dar 4 zile pe săptămînă? Sînt în aceste cazuri corecțiile semnificative față de cazul cînd reactorul funcționează continuu?

6.86. Să se afle după cît timp de iradiere cu un flux de neutroni $\Phi = 10^{12}$ n/cm$^2 \cdot$ s, activitatea specifică a unei probe de cupru devine egală cu $0{,}35 \frac{\text{Ci}}{\text{g}}$?

* Prin secțiune eficace a unui proces nuclear vom înțelege mărimea $\sigma = \frac{dN}{dt \cdot \Phi \cdot N_0}$, unde dN este numărul de reacții care se produc în timpul dt, în cazul cînd N_0 nuclee-țintă sînt iradiate cu un flux de particule de densitate Φ; unitatea de măsură a secțiunii eficace este: 1 barn = 10^{-28} m^2.

Se dau: a) pentru ^{63}Cu: $\alpha = 69{,}1\%$, $\sigma = 4{,}5$ b,
b) pentru ^{65}Cu: $\alpha = 30{,}9\%$, $\sigma = 1{,}8$ b
c) $T(^{64}\text{Cu}) = 12{,}9$ h; $T(^{66}\text{Cu}) = 5{,}15$ min

α fiind abundența izotopului respectiv.

6.87. Cu hidrogenul greu care intră în compoziția apei grele se realizează următoarele reacții termonucleare:

$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} = {}^3_1\text{H} + {}^1_1p + W_1$$

$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} = {}^3_2\text{He} + {}^1_0n + W_2$$

$$^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^1_0n + W_3$$

$$^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} = {}^4_2\text{He} + {}^1_1p + W_4.$$

Să se afle: a) cantitățile de energie exprimate în MeV obținute în cele patru reacții, cunoscînd particula și masa corespunzătoare în u. ($^2_1$H...2,01474); ($^3_1$H...3,01700); ($^3_2$He...3,01697); ($^4_2$He...4,00387).

b) Cu cîți litri de benzină echivalează un litru de apă, cu al cărui hidrogen greu s-ar realiza cele patru reacții nucleare, cunoscînd că:

1) la 6000 molecule de apă obișnuită se află 1 moleculă de apă grea;

2) cele patru reacții menționate se realizează cu aceeași probabilitate;

3) puterea calorică a benzinei este de $11\,000 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \left(46 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}\right)$ și densitatea ei de $0{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Se amintește că 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-12}$ erg.

c) Din ce cantitate de uraniu-235 s-ar libera aceeași energie (cît a hidrogenului greu dintr-un litru de apă) prin fisiune nucleară? Se amintește că un atom de $^{235}_{92}$U eliberează prin fisiune 200 MeV.

d) În cît timp o tonă de radiu eliberează aceeași cantitate de energie prin dezintegrare radioactivă?

Se amintește că un gram de radiu emite prin dezintegrare $140 \frac{\text{cal}}{\text{oră}} \left(580 \frac{\text{J}}{\text{h}}\right)$.

(Gazeta de Matematică și Fizică-B 6016, nr. 10/1963; Olimpiadă 1963).

6.88. Să se calculeze energia de legătură și energia medie de legătură per nucleon, a unui nucleu de $^{18}_8$O știind că unei unități atomice de masă îi corespunde o energie de 931,5 MeV și $m_p = 1{,}00727$ u;

$$m_n = 1{,}00866 \text{ u}; \quad m_{^{18}_8\text{O}} = 17{,}99917 \text{ u}.$$

6.89. a) Cît este masa electronului în unităţi atomice de masă? (Unitatea atomică de masă reprezintă prin definiţie a douăsprezecea parte din masa unui atom de $^{12}_{6}C$).

b) Cît este masa unui atom de hidrogen uşor ($^{1}_{1}H$), dacă se neglijează energia de legătură a electronului? (Se dă: $m_p = 1{,}00727$ u).

c) Cît este masa atomului de deuteriu (hidrogen greu, $^{2}_{1}H$), dacă energia de legătură proton-neutron este de 1,1MeV? (Se dă masa neutronului: $m_n = 1{,}00866$ u.)

6.90. Centrala electrică Ovidiu II, construită în cadrul planului de electrificare, are puterea instalată de 36 000 kW şi foloseşte cărbune drept sursă de energie. Randamentul instalaţiei fiind de 30%, cît cărbune s-ar consuma în tinp de 24 ore?

Pentru o centrală atomoelectrică de aceeaşi putere şi cu acelaşi randament, cît combustibil nuclear de fisiune $^{235}_{29}U$ ar fi necesar să se dezintegreze în reactor în acelaşi timp? De cîte ori e mai mare cantitatea de cărbune consumată faţă de cantitatea de uraniu? $q = 7000 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$. Energia unui atom de $^{235}_{92}U$ dezintegrat este aproximativ 200 MeV.

(Gazeta de Matematică şi Fizică-B 5611, nr. 1/1963)

6.91. Să se completeze următoarele reacţii nucleare:

a) $^{4}_{2}He + {}^{11}_{5}B = {}^{14}_{7}N + ?$

b) $^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N = ? + {}^{1}_{1}H$

c) $^{4}_{2}He + {}^{16}_{8}O = {}^{19}_{9}F + ?$

d) $^{4}_{2}He + {}^{23}_{11}Na = {}^{26}_{12}Mg + ?$

(Gazeta de Fizică şi Chimie-B 1145 nr. 12/1966)

6.92. Fiind iradiat cu neutroni, un nucleu de sulf eliberează un proton şi trece în radiofosfor $^{32}_{15}P$, care emite radiaţii β cu energia $W = 1{,}7$ MeV şi are timpul de înjumătăţire $T = 15$ zile. Fiind culese într-un calorimetru cu capacitatea calorică $C = 10^3$ J/grd, radiaţiile β emise într-un minut ($\Delta t = 1$ min) i-au ridicat temperatura cu $\Delta\,\theta = 81{,}6$ grd. Se neglijează pierderile. Se cer:

a) Energia reacţiei de formare a radiofosforului şi felul acestei reacţii.

b) Cantitatea de sulf care a fost iradiată cu neutroni, ştiind că atomii de sulf sînt ciocniţi în porporţie de 1/100. Se dau:

$m_{^{32}P} = 31{,}98409$ u; $m_n = 1{,}00898$ u; $m_{^{32}S} = 31{,}98224$ u;

$m_p = 1{,}00759$ u; 1 u = 931 MeV; $N = 6{,}0 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

(Concurs de Fizică, Etapa finală, 1969).

RĂSPUNSURI ŞI REZOLVĂRI

1.1.1. Din asemănarea triunghiurilor OAM şi BCM (fig.1.1.1.R) rezultă

$\frac{H}{h} = \frac{x}{x - x_1}$, de unde $x = \frac{Hx_1}{H-h}$ şi $v = \frac{dx}{dt} = \frac{Hv_1}{H-h} = 1{,}71$ m/s.

1.1.2. Deoarece θ este unghi exterior triunghiului MNP (fig. 1.1.2.R) rezultă că $\theta = 2(i+i_1)$. Pe de altă parte $\overset{\frown}{NQR} = \varphi$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare şi deci $\varphi = i + i_1$, aşa încît $\theta = 2\varphi$. Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ rezultă $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

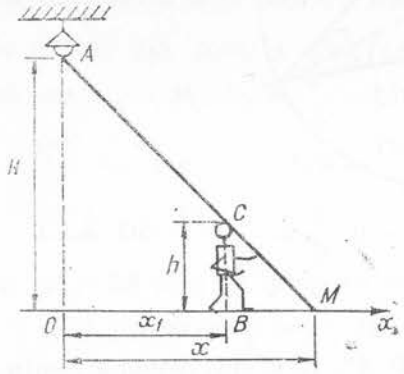


Fig. 1.1.1. R

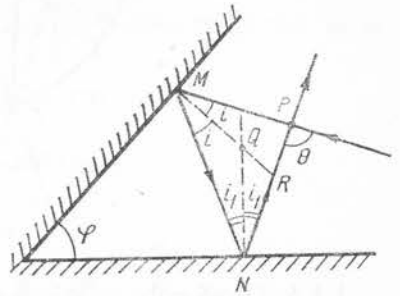


Fig. 1.1.2. R

1.1.3. Fie SA raza incidentă, care suferă trei reflexii succesive (fig. 1.1.3.R) în punctele B, C şi D, iar ES' raza emergentă care face unghiul $\delta = \overset{\frown}{EKA}$ cu cea iniţială. Unghiul de refracţie r se păstrează în cele trei reflexii, iar raza ES' iese sub unghiul de incidenţă i din sferă. Pe figură se vede că: $\overset{\frown}{AOE} = (\overset{\frown}{AOC} + \overset{\frown}{COE})$

și ținînd seama de măsura fiecărui unghi rezultă : $\widehat{AOC} = 2\,\widehat{ABC} = 4r$ și $\widehat{COE} = 2\,\widehat{CDE} = 4r$, astfel încît $\widehat{AOE} = 8r$. În triunghiul isoscel AOE, unghiurile de la bază sînt deci : $\widehat{EAO} = \widehat{OEA} = \frac{\pi}{2} - 4r$. Triunghiul AKE este de asemenea isoscel iar $\widehat{KAE} = \widehat{KEA} = i - 4r + \frac{\pi}{2}$ așa încît din triunghiul AKE rezultă : $\delta = 8r - 2i$, unde $r = \text{arc sin}\,\frac{1}{n}\sin i$.

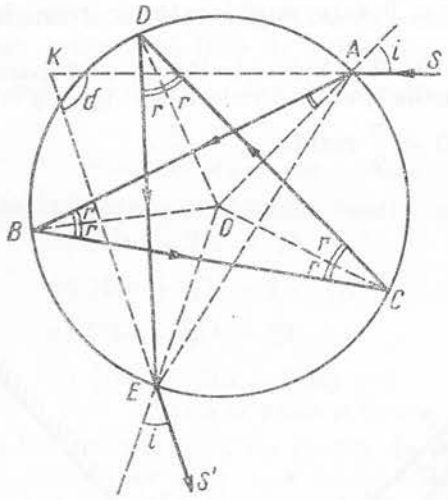


Fig. 1.1.3. R

1.1.4. După cum se știe punctele P, P', B, C sînt armonic conjugate (fig. 1.1.4.R), adică $\frac{CP}{CP'} = \frac{BP}{BP'}$, deoarece bisectoarea împarte latura pe care cade în segmente proporționale cu laturile unghiului considerat. Aceeași relație este însă verificată și în cazul oglinzilor sferice, ceea ce arată proprietatea cerută.

1.1.5. Fie $I(x_0, y_0)$ punctul de incidență al razei inițiale SI și i unghiul de incidență (fig. 1.1.5.R). Coeficientul unghiular al tangentei la curba $f(x)$ în punctul I este $m_1 = f'(x)$, iar al normalei este $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Pe figură se observă că $\text{tg}\ i = m_2$, iar coeficientul unghiular al razei reflectate este $m = \text{tg}\,2i = \frac{2m_2}{1-m_2^2}$.

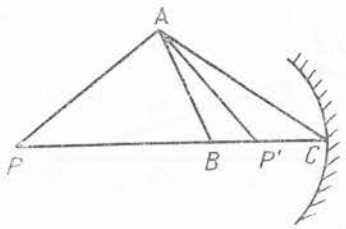


Fig. 1.1.4. R

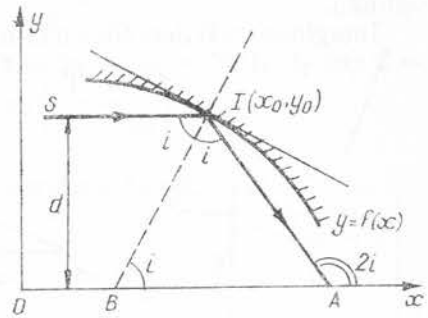


Fig. 1.1.5. R

Ecuația dreptei care reprezintă raza reflectată este $y - y_0 = m(x - x_0)$, iar intersecția sa cu axa Ox duce la $x = x_0 - \frac{y_0}{m}$ unde $y_0 = d$, iar x_0 se obține din ecuația $d = f(x_0)$. În cazul aplicației numerice se obține $y_0 = 30$, $x_0 = \frac{d^2}{6} = 150$ și $m_2 = -\sqrt{\frac{2d}{3}} = -2\sqrt{5}$, iar $m = \frac{4\sqrt{5}}{19}$ așa încît $x = 150 - \frac{19 \times 30}{4\sqrt{5}} = 95$ cm.

1.1.6. Din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$ și $\gamma = \frac{p'}{p}$ se obține :

a) $p' = 30$ cm ; b) $p' = 10$ cm.

1.1.7. Deoarece $p \gg p'$, din relația $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$ rezultă că $p' = \frac{R}{2}$ și întrucît $\frac{o}{p} = \frac{i}{p'} = \frac{1}{220}$, rezultă

$$i = \frac{p'}{220} = \frac{R}{440} = 22 \text{ mm}.$$

1.1.8. Din formula oglinzilor sferice rezultă că imaginea laturii AB se va forma la distanța $p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = 12$ cm față de vîrful V

al oglinzii, iar mărimea sa este $i = o\frac{p_1'}{p_1} = 2$ cm. Imaginea punctului C se va forma la distanța $p_2' = \frac{p_2 f}{p_2 - f} = 11$ cm față de vîrful oglinzii.

Imaginea va fi deci tot un triunghi dreptunghic cu catetele $A'B' = 2$ cm și $A'C' = p_1' - p_2' = 1$ cm.

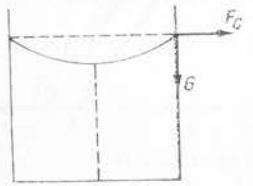


Fig. 1.1.9. R

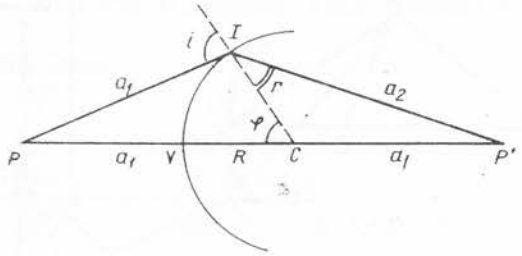


Fig. 1.1.10 R

1.1.9. În urma rotirii vasului, (fig. 1.1.9.R) suprafața mercurului capătă aproximativ forma unei calote sferice, asimilabilă unei oglinzi sferice convergente. Raza R a acestei oglinzi se află din condiția de echilibru a unei porțiuni de lichid de masă m aflată la distanța R de axă: $mR\omega^2 = mg$, de unde $R = \frac{g}{\omega^2}$ și distanța focală a oglinzii este $f = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2} = 490$ cm. Deoarece $f > d$ putem presupune că nivelul mercurului nu a scăzut prea mult, așa încît din $\frac{1}{d} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ rezultă $p' = -1{,}25$ m, imaginea fiind virtuală.

1.1.10. Cu notațiile din figură, aplicînd teorema sinusului în triunghiurile PIC și $P'IC$, obținem.

$$\frac{PC}{\sin i} = \frac{PI}{\sin \varphi} \text{ respectiv } \frac{P'C}{\sin r} = \frac{P'I}{\sin \varphi}$$

de unde deducem eliminînd $\sin \varphi$

$$\frac{PC}{PI}\,\frac{P'I}{P'C} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

În aproximația fasciculelor paraxiale, avem $PI = a_1$ și $P'I = a_2$ și deoarece $PC = a_1 + R$, iar $P'C = a_2 - R$, ultima relație devine

$$\frac{a_1 + R}{a_1}\,\frac{a_2}{a_2 - R} = \frac{n_2}{n_1}$$

adică

$$n_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a_1}\right) = n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a_2}\right).$$

Cînd $a_1 \to \infty$, $a_2 = f_2$ și relația conduce la: $f_2 = R\frac{n_2}{n_2 - n_1}$.

Cînd $a_2 \to \infty$, $a_1 = f_1$ și obținem: $f_1 = R\frac{n_1}{n_2 - n_1}$.

1.1.11. Fie A și B cele două puncte date, P planul pe care se produce reflexia și I' un punct oarecare aflat în P (fig. 1.1.11.R). Proiecția lui I' pe planul care trece prin A și B și este perpendicular pe P (planul de incidență) este I. Dacă t' este timpl necesar luminii ca să străbată drumul $AI'B$, iar t timpul necesar pentru parcurgerea drumului AIB, vom avea $t' > t$. Într-adevăr,

$$t' = \frac{AI' + I'B}{c} \text{ și } t = \frac{AI + IB}{c}$$

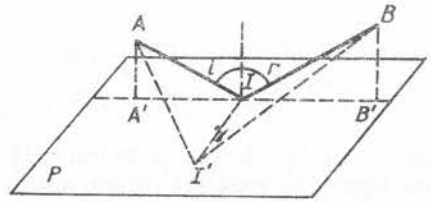


Fig. 1.1.11 R

unde c este viteza luminii. Însă prin construcție $AI' > AI$ și $BI' > BI$, astfel încît $t' > t$. Raza incidentă și reflectată se găsesc așadar în planul de reflexie (prima lege a reflexiei). Notînd

$AA' = d_1$, $BB' = d_2$, $A'B' = d$, și $A'I = x$, avem

$$t = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + (d - x)^2}}{c}$$

și conform principiului lui Fermat trebuie ca $\frac{dt}{dx} = 0$, de unde obținem

$$\frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{d_2^2 + (d - x)^2}}$$

adică $i = r$; deducem astfel cea de-a doua lege a reflexiei.

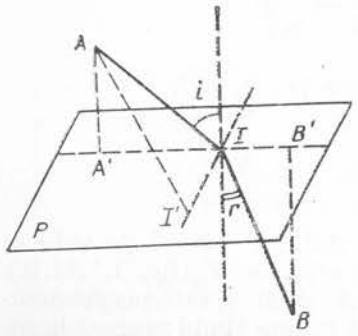


Fig. 1.1.12 R

1.1.12. Fie t' timpul necesar luminii să străbată distanța $AI'B$ (fig. 1.1.12.R) unde I' este un punct oarecare din planul P pe care se produce refracția. Dacă t este timpul în care raza străbate distanța AIB (I fiind proiecția lui I' pe un plan perpendicular pe P și care trece prin A și B) avem

$$t' = \frac{AI'}{c_1} + \frac{I'B}{c_2} \text{ și } t = \frac{AI}{c_1} + \frac{IB}{c_2}$$

unde c_1 și c_2 este viteza luminii în cele două medii. Dar prin construcție $AI' > AI$ și $I'B, > IB$, de unde: $\frac{AI'}{c_1} > \frac{AI}{c_1}$ și $\frac{I'B}{c_2} > \frac{IB}{c_2}$ și adunînd membru cu membru aceste egalități obținem

$$\frac{AI'}{c_2} + \frac{I'B}{c_2} > \frac{AI}{c_1} + \frac{IB}{c_2}$$

adică $t' > t$ și deci raza incidentă și refractată se află în planul de incidență (prima lege a refracției). Dacă notăm (la fel ca în problema precedentă): $AA' = d_1$, $BB' = d_2$, $A'B' = d$ și $A'I = x$, rezultă

$$t = \frac{1}{c_1}\sqrt{d_1^2 + x^2} + \frac{1}{c^2}\sqrt{d_2^2 + (d - x)^2}$$

și din condiția de minim $\left(\frac{dt}{dx} = 0\right)$ se obține $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$

(a doua lege a refracției).

1.1.13. Fie un dioptru de formă oarecare mărginit de două medii cu indicii de refracție n_1 și n_2 și două raze oarecare SI_1S' și SI_2S' (fig. 1.1.13.R). Conform principiului Fermat timpul necesar luminii ca să străbată drumurile SI_1S' și SI_2S' este același, adică

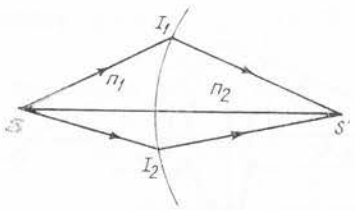


Fig. 1.1.13 R

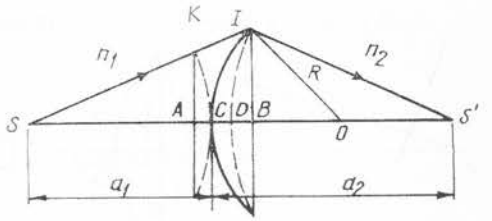


Fig. 1.1.14 R

$$\frac{SI_1}{c_1} + \frac{I_1S'}{c_2} = \frac{SI_2}{c_1} + \frac{I_2S'}{c_2}$$

înmulțind ultima egalitate cu c (viteza luminii în vid) și ținînd seama că $n_1 = \frac{c}{c_1}$ și $n_2 = \frac{c}{c_2}$, obținem: $n_1SI_1 + n_2I_1S' = n_1SI_2 + n_2I_2S'$ ceea ce arată egalitatea drumurilor optice pentru cele două raze.

1.1.14. Conform problemei precedente, drumurile optice (SIS') și (SCS') sînt egale: $n_1SI + n_2IS' = n_1SC + n_2CS'$. Dacă ducem cercurile cu centrul în S și S' și de raze SC, respectiv $S'I$ (fig. 1.1.14.R) se vede că: $n_1SK = n_1SC$ și $n_2IS' = n_2DS'$ și scăzînd membru cu membru aceste egalități din ultima relație, rezultă: $n_1KI = n_2CD$. Razele fiind însă paraxiale, putem aproxima $KI \approx AD$ deci $n_1AD = n_2CD$ sau $n_1(AC + CD) = (CB - DB)n_2$ și în aceeași aproximație

$$AC = \frac{IA^2}{2a_1}; \quad CD \approx CB = \frac{IA^2}{2R}; \quad DB = \frac{IA^2}{2a_2}$$

astfel încît în urma înlocuirii obținem $\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$.

1.1.15. Analog cu problema precedentă se construiesc cercurile cu centrele în S și S', de raze SI, respectiv $S'I$ (fig. 1.1.15.R). Din egalitatea drumurilor optice pentru razele SIS' și SO_1S' rezultă: $SI + IS' = SO_1 + O_1S'$, sau $SO_1 - SI = IS' - O_1S'$. Dar $SI = SC$,

$IS' = DS'$ și deci : $SO_1 - SC = DS' - O_1S'$, adică $CO_1 = O_1D$; această ultimă egalitate este însă echivalentă cu : $O_1E - EC = ED - EO_1$. Cu aproximație avem : $O_1E = \frac{IE^2}{2R}$, $EC = \frac{IE^2}{2a_1}$, $ED = \frac{AE^2}{2a_2}$,

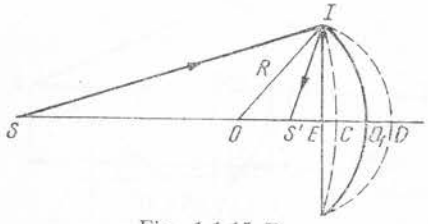


Fig. 1.1.15 R

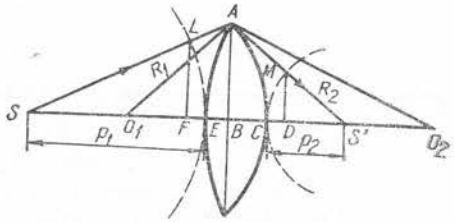


Fig. 1.1.16 R

și după înlocuire se obține formula oglinzilor sferice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}.$$

1.1.16. Fie O_1 și O_2 centrele dioptrilor sferici (de raze R_1 și R_2) din care este alcătuită lentila, S și S' punctul-obiect și punctul-imagine, iar SE și $S'D$ razele cercurilor cu centrele în S și S' (fig. 1.1.16.R). Scriem egalitatea drumurilor optice pentru razele SAS' și $SEDS'$, de unde rezultă : $LA + AM = n \cdot EC$, relație care este aproximativ aceeași cu : $FB + BD = n \cdot EC$, de unde

$$FE + CD = (n - 1)\, EC \qquad (1)$$

În aproximația fasciculelor paraxiale avem

$$FE = \frac{AB^2}{2p_1}, \quad CD = \frac{AB^2}{2p_2}, \quad FB = \frac{AB^2}{2R_2}, \quad BD = \frac{AB^2}{2R_1}.$$

Înlocuind ultimele relații în formula (1) se obține

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

adică formula lentilelor subțiri.

1.1.17. Trebuie ca $i = \pi - \alpha - \arcsin \frac{n_1}{n_2} \sin i$.

Cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obține $i = \operatorname{arctg} n$.

1.1.18. $\Delta = e \frac{\sin (i - r)}{\cos r} = 6{,}65$ cm.

1.1.19. Înălțarea aparentă fiind $h = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (vezi (8) din breviar) grosimea aparentă a lamei de sticlă este $d = e - h = \frac{e}{n}$, de unde $n = \frac{e}{d} = 1{,}5$.

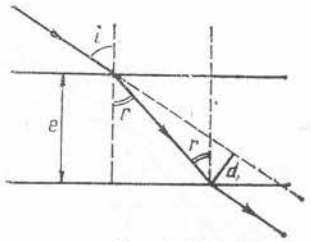


Fig. 1.1.20 R

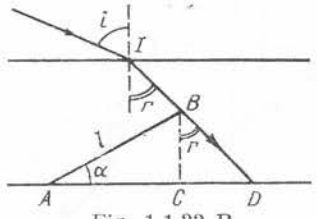


Fig. 1.1.22 R

1.1.20. Din fig. 1.1.20.R rezultă

$$d = \frac{e}{\cos r} \sin (i - r) = \frac{e}{\cos r} (\sin i \cos r - \sin r \cos i) = e \sin i - e \cos i \operatorname{tg} r.$$

Dar $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ și $\sin r = \frac{\sin i}{n}$, iar $\operatorname{tg} r = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$ și făcînd înlocuirile rezultă în final

$$n = \frac{\sin i}{e \sin i - d} \sqrt{e^2 + 2ed \sin i + d^2}.$$

1.1.21. Fie $n_1, n_2, \ldots, n_k$, indicii de refracție ai celor k medii succesive, i_1 unghiul de incidență pe prima suprafață de separare și $r_2, r_3, \ldots, r_k$ unghiurile de refracție corespunzătoare. Aplicînd succesiv de k ori legea refracției, rezultă

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_2 = n_3 \sin r_3 = \ldots = n_k \sin r_k.$$

Din prima și ultima egalitate rezultă proprietatea cerută.

1.1.22. Din figură se vede că $BC = l \sin \alpha$; $AC = l \cos \alpha$ și $\operatorname{tg} r = \frac{AD - AC}{BC} = \frac{k - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, de unde

$$\sin r = \frac{k - \cos \alpha}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \alpha + 1}} \text{ și din } n \sin i = n_1 \sin r$$

rezultă

$$i = \arcsin \frac{n_1}{n} \frac{k - \cos\alpha}{\sqrt{k^2 - 2k\cos\alpha + 1}}.$$

1.1.23. Din figură se vede că $SI = \dfrac{h}{\cos i}$,

$$II' = \frac{e}{\cos r} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

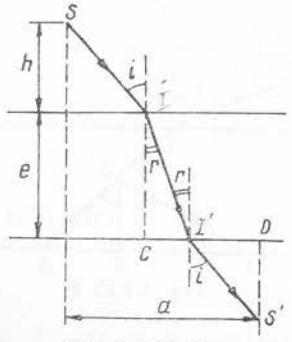


Fig. 1.1.23 R

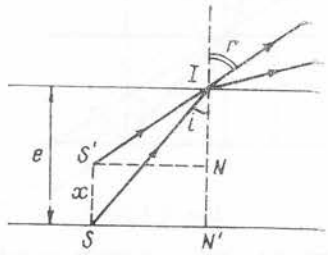


Fig. 1.1.25 R

și

$$I'S' = \frac{I'D}{\sin i} = \frac{1}{\sin i}(a - h\operatorname{tg} i - e\operatorname{tg} r) = \frac{1}{\sin i}\left(a - h\operatorname{tg} i - e\frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right).$$

Deci $l = SI + II' + I'S' = 43{,}59$ cm.

1.1.24. a) $d = p_1 + \dfrac{p_2}{n} = 1{,}8$ m; $d' = p_2 + np_1 = 2{,}4$ m.

b) Oglinda pare că se află la distanța $\dfrac{D}{2} = p_1 + \dfrac{e}{n} = 2{,}1$ m față de observator, deci imaginea se va forma la $D = 4{,}2$ m față de ea. Golind cuva, imaginea se îndepărtază cu 0,6 m.

1.1.25. a) Fie x spațiul străbătut după timpul t $\left(x = \dfrac{at^2}{2}\right)$ astfel încît din triunghiul $S'IN$ (fig. 1.1.25 R) avem: $\sin i = \dfrac{S'N}{S'I}$ și deoarece $i_0 = \dfrac{\pi}{4}$, rezultă că $S'N = SN' = e$ așa încît

$$\sin i = \frac{e}{\sqrt{e^2 + (e - x)^2}} \quad \text{și} \quad \sin r = \frac{ne}{\sqrt{e^2 + \left(e - \dfrac{at^2}{2}\right)^2}}$$

b) Fie τ timpul după care apare reflexia totală ($\sin r = 1$); din

$$ne = \sqrt{e^2 + \left(e - \frac{a\tau^2}{2}\right)} \text{ rezultă } \tau = 0{,}133 \text{ s.}$$

1.1.26. Pe figură se observă că $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ și punînd condiția de reflexie totală în I' rezultă $n_1 = n_2 \cos r$; eliminînd între cele două relații pe r, se obține

$$i = \arcsin \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - 1} = 31°.$$

1.1.27. Dacă $i_1 = 90°$ este unghiul de incidență, din formulele prismei rezultă

$$n = \frac{1}{\sin r_1}; \quad n = \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin r_2}; \quad \operatorname{tg}^2 r_1 = 1{,}6\operatorname{tg}^2 r_2;$$

rezolvînd sistemul astfel obținut se capătă $r_1 = 41°$; $r_2 = 35°$ și $n = 1{,}67$.

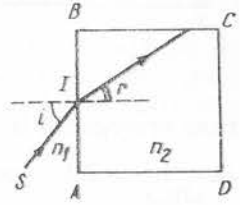


Fig. 1.1.26 R

1.1.28. Raza emergentă nu poate părăsi prisma pentru unghiuri $i' \geqslant l$ (cînd are loc fenomenul de reflexie totală). La limită, cînd $i' = l$, din legile prismei $n = \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{1}{\sin r'}$ și $A = r + r'$ rezultă $A = \arcsin \dfrac{1}{n} \sin i + \arcsin \dfrac{1}{n}$. Condiția este așadar $A \leqslant \arcsin \dfrac{1}{n} \sin i + \arcsin \dfrac{1}{n}$. Deoarece $\sin i < 1$, o condiție mai puțin restrictivă care decurge din cea anterioară este $A \leqslant 2l$ $\left(l = \arcsin \dfrac{1}{n}\right.$ fiind unghiul limită$\left.\right)$.

1.1.29. a) Mersul este reprezentat în figură. b) Pe figură se observă că din cauza mersului simetric al razei prin prismă: $\widehat{ISB} = \widehat{S'I''x}$, adică SI și $I''S'$ sînt paralele; c) Deoarece $A = 2r$, rezultă $r = 30°$, iar $i = d + 30 = 50°$, așa încît $n = \dfrac{\sin 50°}{\sin 30°} = 1{,}532$.

1.1.30. a) Pe figură se vede că $r' = 90° - \alpha = 45°$ și $r = B - r' = 30°$, așa încît $\sin i = n \sin r = \frac{n}{2}$; b) la limită, cînd

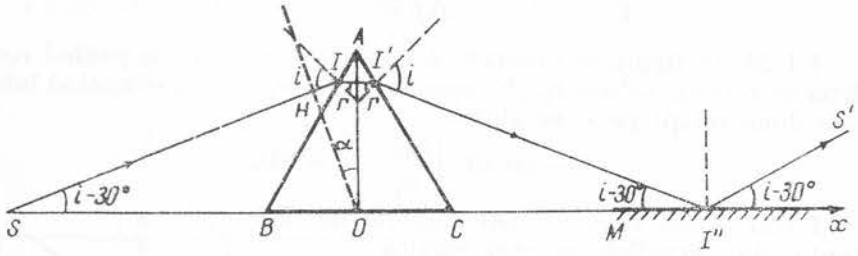


Fig. 1.1.29 R

raza emergentă în I' este orientată de-a lungul feței BC, avem : $n = \frac{1}{\sin r'} = \sqrt{2}$; condiția cerută este deci $n \geqslant \sqrt{2}$; c) Se observă că $\widehat{I''I'C} = 45°$ și $\widehat{I'I''L} = 30°$ astfel încît unghiul de emergență pe fața AC este egal cu unghiul de incidență i; rezultă că $\widehat{MI''A} = \widehat{MIB} = 90 - i$ și deoarece unghiurile $\widehat{MI''A}$ și $\widehat{MIB}$ au o latură perpendiculară, trebuie ca $I''M$ și IM să fie perpendiculare.

1.1.31. a) Pe fața BC va avea loc o reflexie totală și $\widehat{BI'I} = \widehat{I''I'C}$ (fig. 1.1.31.R) așa încît raza emergentă iese pe fața AC

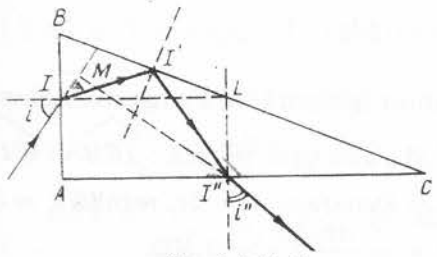


Fig. 1.1.30 R

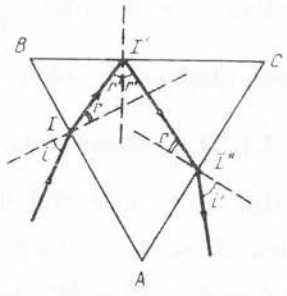


Fig. 1.1.31 R

sub un unghi de emergență i' egal cu cel de incidență. Cînd $i = 90°$, raza va ieși pe fața BC sub un unghi $i' = i = 90°$.

$$\text{b)} \quad n = \frac{\sin \frac{\delta + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{2} \cdot$$

1.1.32. a) $SI = \frac{IS_1}{n} = 80$ cm (imaginea este virtuală); b) $\lambda = \arcsin \frac{1}{n} = 38° 41'$; dacă i' este unghiul de incidență pe fața BC, evident că $i' < \lambda$; S_2 este virtuală și simetrică față de S_1 în raport cu BC ; c) Imaginea S' este virtuală, și se află pe o perpendiculară pe mijlocul laturii AC, de partea lui S_2, la distanța $d = 51{,}25$ cm față de AC ; d) $P''P' = 0{,}75$ cm.

1.1.33. Din figură se vede că raza I_1I_2 trebuie să fie perpendiculară pe fața AD a prismei de unghi α_2, astfel încît $n_1 \sin r_1 = n_2 \sin \alpha_2$, deci $r_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2$ și deoarece $\alpha_1 = i_1 - r_1$, rezultă $i_1 = \alpha_1 + \arcsin \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2$.

1.1.34. a) Trebuie ca $\delta = i + i' - A = \frac{\pi}{2}$, de unde ținînd seama și de formulele prismei $\sin i = n \sin r$, $\sin i' = n \sin r'$ și $r + r' = A$ se obține unghiul i.

b) În acest caz $i' = r' = 0$ și $r = A$ astfel încît din $\frac{\sin i}{\sin A} = n$ rezultă $i = \arcsin (n \sin A)$.

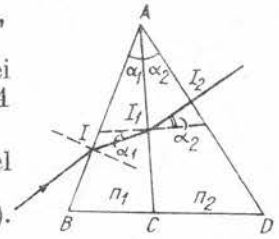


Fig. 1.1.33 R

c) În acest caz $i' = A$ deoarece au laturile perpendiculare și eliminînd pe r și r' între ecuațiile $\sin i = n \sin r$, $\sin A = n \sin r'$, $r + r' = A$, rezultă

$$\sin^2 i + \sin 2A \sin i - (n^2 - 1) \sin^2 A = 0$$

adică o ecuație de gradul doi în raport cu $\sin i$. Deoarece trebuie ca $0 < \sin i < 1$ rezultă condiția

$$n^2 < \frac{1 + \sin 2A + \sin^2 A}{\sin^2 A} \cdot$$

1.1.35. Deoarece SI este orizontală, unghiul de incidență pe oglindă va fi egal cu unghiul de deviație al razei la prima trecere prin prismă, adică $i = \delta = (n-1)A = 2°$. În urma reflexiei, raza va cădea pe prismă sub unghiul de incidență $i = 90°$ și deviația va fi $\delta' = \delta = 2°$; deviația totală este deci $\delta + \delta' = 4°$.

1.1.36. Se folosesc relațiile $n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'}$, de unde se obține $\sin i \sin r' = \sin r \sin i'$ și adăugînd ambilor membri ai ultimei egalități cantitatea $\sin i \sin r$ se obține în urma unor transformări trigonometrice simple

$$\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-i'}{2}} = \frac{\sin r}{\sin i}\,\frac{\sin\frac{i+i'}{2}}{\sin\frac{r+r'}{2}}.$$

Deoarece $i + i' = A + \delta$ și $r + r' = A$, iar $n = \frac{\sin i}{\sin r}$, se obține relația cerută. Cînd $i = i'$ și $r = r'$ se regăsește relația cunoscută pentru deviația minimă.

1.1.37. Dimensiunile obiectului paralele cu muchia prismei se vor transmite neschimbate ca valoare, deoarece lărgimea fasciculului

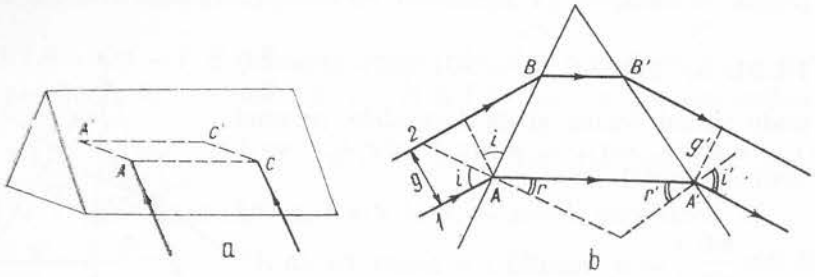


Fig. 1.1.37 R

de raze nu se modifică după această deviație (fig. 1.1.37.R). În schimb lărgimea transversală g a fasciculului de raze (în direcție perpendiculară pe muchia prismei) se poate schimba. Așa cum rezultă din figură avem

$$AB = \frac{g}{\cos i},\quad A'B' = \frac{g'}{\cos i},\quad \text{de unde:}$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{AB\cos i}{A'B'\cos i'} = \frac{\cos r'\,\cos i}{\cos r\,\cos i'}.$$

Pentru ca imaginea să nu fie deformată în direcție perpendiculară pe muchia prismei, trebuie ca $\frac{g}{g'} = 1$, deci $\frac{\cos r'\,\cos i}{\cos r\,\cos i'} = \frac{\sin r'\sin i}{\sin r\sin i'} = 1$ și aplicînd o proprietate a proporțiilor derivate căpătăm: $\frac{\cos(i-r')}{\cos(i'-r)} = \frac{\cos(i+r')}{\cos(i'+r)} = 1$. Ținînd seama că $r + r' = A$, ultimele relații devin: $\cos(A + i - r) = \cos(A + i' - r')$, de unde $i - r = i' - r'$ și $\cos(-A + i + r) = \cos(-A + i' + r')$, de unde $i + r = i' + r'$; din aceste relații rezultă $i = i'$; $r = r'$, deci condiția cerută este ca prisma să fie pusă la minim de deviație.

1.1.38. Prismele trebuie să fie așezate ca în figură. Muchia prismei *2* se așează paralel cu perpendiculara comună a razelor *1'* și *2'* pentru a nu da o deformare pe această direcție.

Se rotește apoi prisma *2* în jurul acestei direcții, pînă cînd raza *1'* va forma cu fața prismei același unghi α pe care-l face raza *1* cu fața anterioară a prismei *1*. În felul acesta mărirea după o direcție

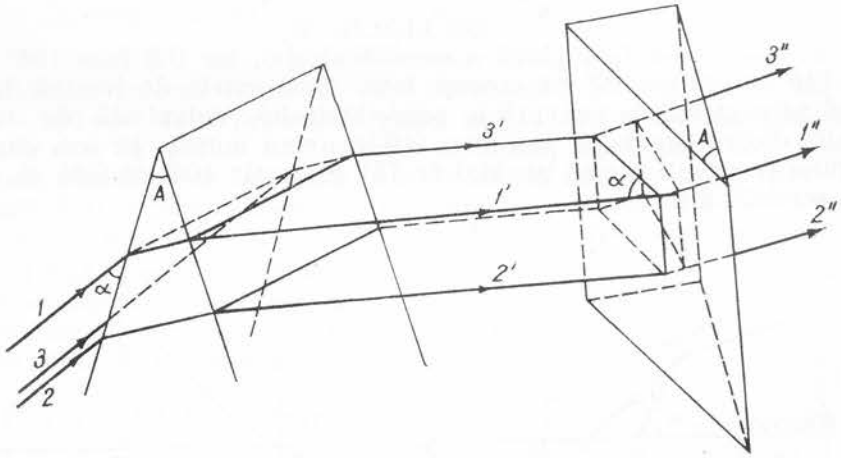
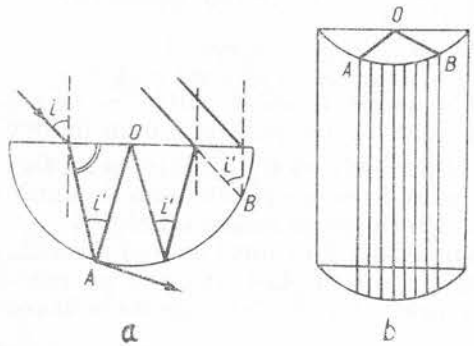


Fig. 1.1.38 R

perpendiculară pe razele *1'* și *3'* este aceeași cu mărirea dată de prisma *1* (vezi probl. 1.1.37). Imaginea dată de sistemul celor două prisme va fi uniform mărită în raport cu două direcții perpendiculare, deci va fi asemenea cu obiectul.

1.1.39. La intrarea în cilindru are loc o refracție sub un unghi de refracție $r = \arcsin\frac{\sin i}{n} = 30°$. La ieșirea din cilindru are loc o

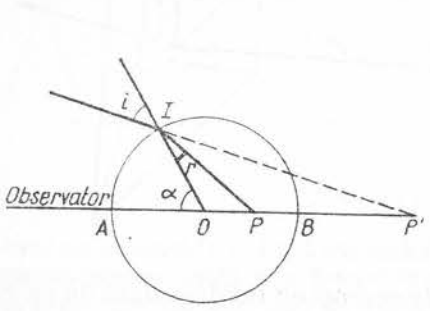
nouă refracție, atît timp cît unghiul i' nu depășește unghiul limită. Unghiul limită l este dat de $l = \arcsin\frac{1}{n} = 45°$. Pe figură se vede că incidența $i' = l = 45°$ pe fața convexă a cilindrului se realizează pentru punctele A și B. Raza OA face unghiul $180° - (60° + 45°) = 75°$ cu fața plană a semicilindrului, iar OB face $180° - (45° + 120°) = 15°$ cu aceeași față. Deci razele de lumină vor ieși prin suprafața convexă a semicilindrului, delimitată de unghiul diedru drept (cu secțiunea AOB) avînd muchia pe axa cilindrului și planele făcînd unghiul de 75°, respectiv 165° cu fața plană a semicilindrului.



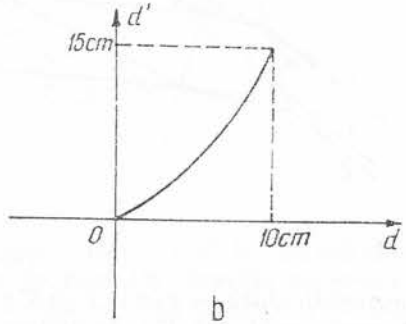
a

b

Fig. 1.1.39 R



a



b

Fig. 1.1.40 R

1.1.40. Fie P poziția particulei la un moment oarecare și P' imaginea sa. Cu notațiile de pe figura a, obținem

$$\frac{\sin(\alpha - r)}{\sin r} = \frac{OI}{OP} \text{ și } \frac{\sin(\alpha - i)}{\sin i} = \frac{OI}{OP'}.$$

Deoarece observatorul privește de-a lungul aceluiași diametru orizontal AB, unghiurile α, r și i sînt mici, astfel încît relațiile anterioare devin

$$\frac{\alpha - r}{r} = \frac{OI}{OP} \text{ și } \frac{\alpha - i}{i} = \frac{OI}{OP'}.$$

Dacă notăm $AP = d$, $AP' = d'$ și $OI = R$ rezultă $OP = d - R$ și $OP' = d' - R$ astfel încît

$$\frac{\alpha - r}{r} = \frac{R}{d - R} \text{ și } \frac{\alpha - i}{i} = \frac{R}{d' - R}.$$

De aici rezultă: $\frac{d - R}{d} = \frac{r}{\alpha}$ și $\frac{d' - R}{d'} = \frac{i}{\alpha}$ de unde prin împărțire se obține: $\frac{d - R}{d' - R} = \frac{d}{d'}\frac{r}{i}$ și ținînd seama de legea refracției $i = nr$, deducem

$$d' = \frac{Rd}{nR - (n-1)d}.$$

Înlocuind valorile numerice date se obține: $(d - 20)(d' + 15) = -300$ ceea ce reprezintă ecuația unei hiperbole echilaterale cu axele $d = 20$ și $d' = -15$. Cînd $d = 10$ cm, adică particula se află în B, imaginea se formează la $d' = 15$ cm față de observator. Pe măsură ce d scade, scade și d' astfel încît atunci cînd $d = 0$ și $d' = 0$. Variația distanței d' în funcție de d se poate urmări pe figura b.

1.1.41. Diametrul petei luminoase OB ce se formează pe suprafața opacă este determinat de razele tangente la emisferă, provenite de la sursa S. Notînd $OS = d$; $OT = R$; $\widehat{BTO} = r$, avem

$$ST = \sqrt{d^2 - R^2} \text{ și } \sin r = \frac{1}{n}.$$

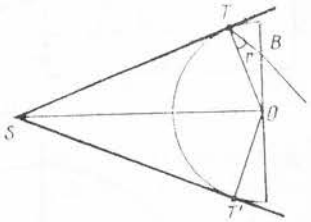


Fig. 1.1.41 R

În triunghiul OBT, aplicînd teorema sinusurilor, avem

$$\frac{OB}{\sin r} = \frac{OT}{\sin B} \text{ în care } \sin B = \sin(\theta_2 + r) = \sin\theta_2 \cos r + \cos\theta_2 \sin r.$$

Dar $\sin\theta_2 = \cos\theta_1 = \frac{R}{d}$.

Deci : $$\sin B = \frac{R}{d}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{R^2}{d^2}} =$$

$$= \frac{1}{nd}\left(R\sqrt{n^2-1} + \sqrt{d^2-R^2}\right)$$

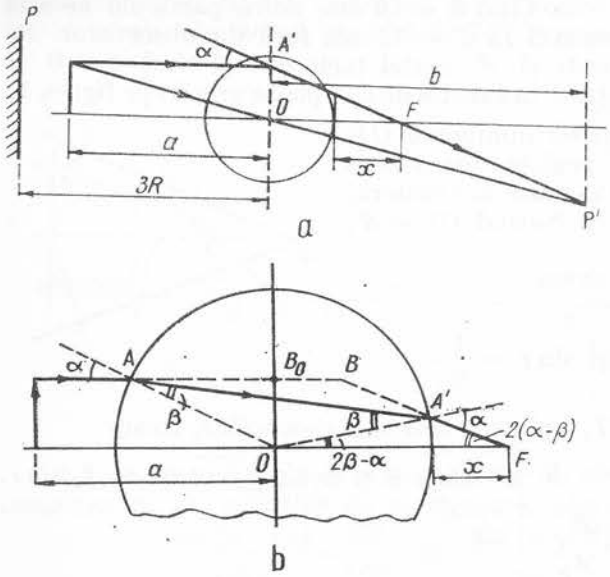
$$\text{Deci : } OB = \frac{Rd}{R\sqrt{n^2-1} + \sqrt{d^2-R^2}}.$$

Trebuie să aflăm valoarea lui d pentru care OB e minim, adică trebuie calculată derivata

$$(OB')_d = \frac{R^2\sqrt{n^2-1} + R\sqrt{d^2-R^2} - Rd\,\dfrac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}}{\left(R\sqrt{n^2-1} + \sqrt{d^2-R^2}\right)^2}.$$

Punînd condiția $(OB')_d = 0$, obținem : $R^2 = (n^2-1)(d^2-R^2)$, de unde

$d = \dfrac{Rn}{\sqrt{n^2-1}} = 6{,}5$ cm. Raza este în acest caz $OB_{min} = \dfrac{R}{n} = 3{,}2$ cm.



1.1.42. Mersul a două raze (una orizontală și alta trecînd prin centrul lentilei sferice) se poate urmări pe figură. În $\Delta OA'F$ aplicăm teorema sinusului

$$\frac{R+x}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{R}{\sin 2(\alpha-\beta)}$$

sau

$$\frac{R+x}{\alpha} = \frac{R}{2(\alpha-\beta)} \qquad (1)$$

Fig. 1.1.42 R

pentru unghiuri α și β mici. În acest caz legea refracției este $\alpha = n\beta$ și din relația (1) deducem

$$x = \frac{R(2-n)}{2(n-1)}. \qquad (2)$$

Problema se reduce la găsirea planului de refracție. Cînd $\alpha \to 0$ punctul $B \to B_0$ și planul de refracție trece prin O și B_0 fiind perpendicular pe AB. Putem deci scrie relația

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{R+x}$$

și înlocuind valoarea lui x din (2), obținem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(n-1)}{nR}.$$

a) Dacă $a_1 = R$ rezultă $b_1 = \dfrac{nR}{n-2}$ și mărirea este $w_1 = \left|\dfrac{n}{n-2}\right|$.

b) Dacă $a_2 = 5R$ rezultă $b_2 = \dfrac{5nR}{9n-10}$ și mărirea este $w_2 = \dfrac{n}{9n-10}$.

Unei deplasări dS a obiectului, îi corespunde o deplasare dS' a imaginii, de unde viteza imaginii este $v' = wv$. Pentru cazurile a) și b) avem $v_1' = w_1 v$ și $v_2' = w_2 v$. Viteza relativă va fi dată de

$$v_r = v_1' + v_2' = \left(\frac{n}{2-n} + \frac{n}{9n-10}\right)v, \text{ de unde } v_r = \frac{8}{3}v.$$

1.2.1. a) $p' = \dfrac{pf}{p-f} = 60$ cm ; b) $i = o\dfrac{p'}{p} = 24$ cm.

1.2.2. Imaginea fiind răsturnată și mai mare decît obiectul, acesta se va afla între focar și distanța $2f$ față de lentilă. Deoarece $\dfrac{p'}{p} = 4$ și $p + p' = 100$, rezultă $p' = 80$ cm și $p = 20$ cm, astfel încît $f = \dfrac{pp'}{p+p'} = 16$ cm și $C = 6{,}75$ dioptrii.

1.2.3. Se observă că mărirea liniară este aceeași atît pentru lungimea cît și pentru lățimea obiectului $\left(\gamma = \dfrac{i}{o} = \dfrac{18}{3} = \dfrac{24}{4} = 6\right)$.

Obiectul poate fi considerat aşadar liniar şi cu notaţiile obişnuite avem: $\frac{p'}{p} = 6$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, unde $f = \frac{1}{C} = \frac{3}{8}$ m. Rezolvînd sistemul rezultă $p = 43{,}75$ cm şi $p' = 262{,}5$ cm.

1.2.4. Razele de curbură fiind egale, se observă (fig. 1.2.4 R) că: $OV = \frac{h}{2}$, $OA = \frac{d}{2}$, $C_1 A = R$. Din ΔOAC_1 aplicînd teorema lui Pitagora şi ţinînd seama că $C_1 O = R - \frac{h}{2}$, găsim $R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{h}{2}\right)^2$, de unde $R = \frac{d^2 + h^2}{4h}$ şi deci

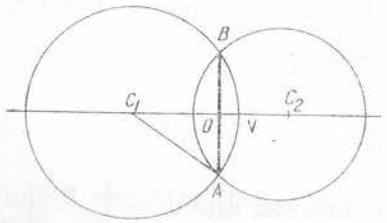


Fig. 1.2.4 R

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\right)} = \frac{1}{(n-1)\frac{2}{R}} = \frac{R}{2(n-1)} = \frac{d^2 + h^2}{8h(n-1)}.$$

1.2.5. Deoarece $p = x_1 + f$, iar $p' = x_2 + f$, formula lentilelor subţiri $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, devine $\frac{1}{x_1 + f} + \frac{1}{x_2 + f} = \frac{1}{f}$, de unde se deduce $x_1 x_2 = f^2$.

1.2.6. Distanţa focală a lentilei este $f = \frac{R}{2(n-1)} = R$ şi din formula lentilelor $\frac{1}{R} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{p'}$ rezultă $p' = \frac{3}{2} R$, deci mărirea liniară este $\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{3R}{3/2\,R} = \frac{1}{2}$.

1.2.7. Dacă p şi p' sînt distanţele de la bec şi ecran pînă la lentilă (în cele două situaţii rolul lui p şi p' se inversează), avem conform datelor problemei $p + p' = L$ şi $p - p' = l$, de unde $p = \frac{L + l}{2}$; $p' = \frac{L - l}{2}$; din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, deducem apoi $f = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 12$ cm şi deoarece $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R}$ rezultă $n = 1{,}5$.

1.2.8. a) Iniţial, imaginea se formează la distanţa $p' = \frac{pf}{p - f}$ faţă de lentilă. În urma dilatării barei cu $\Delta l = l_0 \alpha t$, imaginea se formează la distanţa $p'' = \frac{(p + \Delta l) f}{p + \Delta l - f}$, faţă de noua poziţie a lentilei. Deplasarea imaginii în raport cu prima poziţie, este $d = p' - p'' - \Delta l = 2{,}465$ cm şi are loc de-a lungul axei optice. b) Dacă bara se află în planul principal al lentilei, distanţa de la obiect pînă la lentilă rămîne aproximativ aceeaşi, iar deplasarea imaginii se produce pe o direcţie perpendiculară pe axa optică, astfel încît $d = \Delta l + i'$, unde i' este distanţa de la noua imagine la noua axă optică. Deoarece $i' = \frac{p'}{p} \Delta l = \frac{f \Delta l}{p - f}$, rezultă $d = \frac{p \Delta l}{p - f} = 6{,}9$ mm.

1.2.9. a) Din figură se vede că $OA_1 = p_1 = e\,\frac{n_2 - 1}{n_2}$ şi notînd $OA_1' = p_1'$ avem: $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}$ cu $f_1 = \frac{R}{2(n_1 - 1)}$. Pentru ca să se formeze în acest caz o imagine reală trebuie ca $p_1' > f_1$, adică $e\frac{n_2 - 1}{n_2} > \frac{R}{2(n_1 - 1)}$, de unde obţinem: $e > \frac{n_2 R}{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)}$, adică $e > 40$ cm.

b) În acest caz $p_2 = e$ şi $\frac{1}{f_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{2}{R}$ astfel încît condiţia $p_2 > f_2$ conduce la: $e > \frac{R}{2\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)}$, adică $e > 40$ cm.

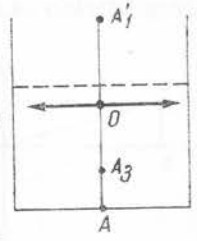


Fig. 1.2.9 R

În primul caz: $p_1' = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} = 14{,}2$ cm, iar în al doilea caz $p_2' = 33$ cm.

1.2.10. Din relaţiile $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ şi $\gamma = \frac{l}{y} = \frac{p'}{p}$ se obţine $y = \frac{lf}{p - f}$. Studiind variaţia lui y în funcţie de p, se obţine curba din figura a. Dacă se consideră numai valoarea absolută a mărimii imaginii, curba ia forma din figura b.

1.2.11. Distanţa focală a lentilei este $f = \frac{1}{C} = 10{,}66$ cm şi deoarece $\gamma = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{1}{2}$, rezultă $p = 2p'$, iar din $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ obţinem $p = 32$ cm adică $p > 2f$. Imaginea este deci reală şi mai

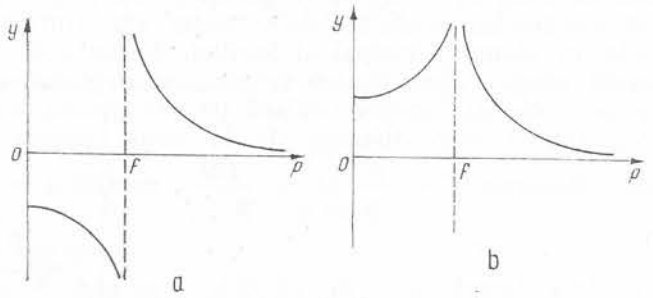


Fig. 1.2.10 R

mică decît obiectul. Din triunghiurile asemenea AOB şi $A'OB'$ avem $\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'}$, de unde printr-o proporţie derivată obţinem $\frac{l}{OA'} = \frac{p + p'}{p'}$ adică $OA' = 20$ cm, iar $OA = 40$ cm. Din triunghiul dreptunghic ABO rezultă apoi $AB = 25$ cm.

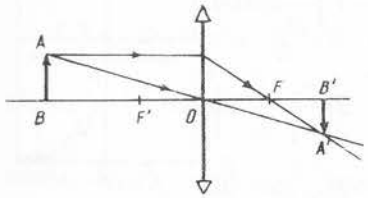


Fig. 1.2.11 R

1.2.12. Pentru prima imagine $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f}$ şi $\frac{i_1}{o} = \frac{p_1'}{p_1}$; pentru a doua imagine $\frac{1}{p_1 + 10} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f}$ şi $\frac{i_1}{2o} = \frac{p_2'}{p_1 + 10}$.

Se obţine un sistem de ecuaţii cu patru necunoscute (f, p_1, p_1', p_2') de unde rezultă $f = 40$ cm.

1.2.13. a) Distanţa p_1 se obţine din $\frac{1}{2f + v\tau} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f}$, iar din $\frac{i_1}{o} = \frac{p_1}{p}$ rezultă $i_1 = o\,\frac{f}{f + v\tau}$. b) Deoarece la momentul iniţial imaginea se află tot la dublul distanţei focale, viteza v' a deplasării sale este $v' = \frac{2f - p_1}{\tau} = \frac{fv}{f + v\tau}$, iar viteza de scădere a imaginii este (ţinînd seama că la momentul iniţial $i = o$) $v'' = \frac{o - i_1}{\tau} = \frac{ov}{f + v\tau}$.

1.2.14. a) Distanţa obiectului pînă la lentilă la momentul t va fi $p = D - \frac{at^2}{2}$ şi din $\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$ rezultă pentru ecuaţia mişcării punctului imagine

$$x = f\,\frac{D - \frac{at^2}{2}}{D - \frac{at^2}{2} - f}. \quad \text{b) } v_i = \frac{dx}{dt} = \frac{af^2 \cdot t}{\left(D - \frac{at^2}{2} - f\right)^2};$$

$$a_i = \frac{dv}{dt} = af^2\,\frac{D + \frac{3}{2}at^2 - f}{\left(D - \frac{at^2}{2} - f\right)^3}. \quad \text{c) Cînd mobilul atinge lentila}$$

$t = \sqrt{\frac{2D}{a}}$ şi în cazul aplicaţiei numerice $v_i = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a_i = -99\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1.2.15. Distanţa p a obiectului faţă de lentilă la momentul t este $p = 2f + 2f \sin \omega t$ (după cum $\sin \omega t$ ia valori pozitive sau

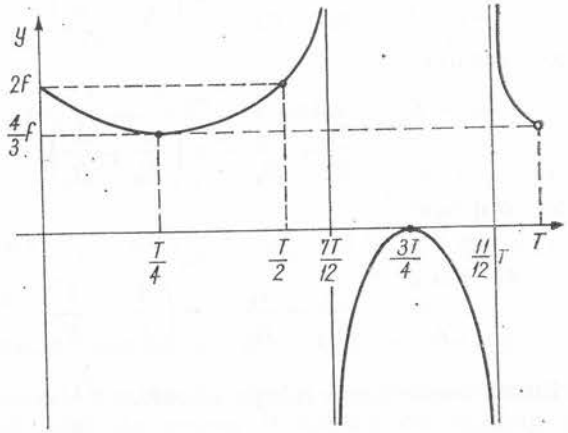


Fig. 1.2.15 R

negative, avem $p > 2f$ sau $p < 2f$). Din $\frac{1}{p} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ rezultă $y = f\left(1 + \frac{1}{1 + 2 \sin \omega t}\right)$. Reprezentarea grafică a funcției $y = y(t)$ în timp de o perioadă e dată în fig. 1.2. 15 R (cînd $y < 0$ imaginea este virtuală). Viteza punctului imagine este $v = \frac{dy}{dt} = -2f\omega \cdot \frac{\cos \omega t}{(1 + 2 \sin \omega t)^2}$.

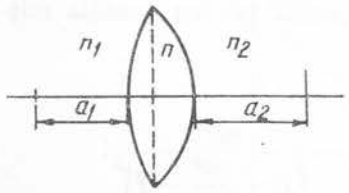


Fig. 1.2.16 R

1.2.16. Fie n indicele de refracție al lentilei, R_1 și R_2 razele de curbură ale fețelor sale și a_1, a_2 distanțele de la punctul obiect, respectiv imagine pînă la vîrful corespunzător al lentilei (fig. 1.2.16 R). Aplicînd legea refracției pentru fiecare din cei doi dioptri sferici, unul convergent și altul divergent care se formează, avem : $n_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{a_1}\right) = n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}\right)$; $n_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{a_2}\right) = n\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{a}\right)$, unde a este distanța primei imagini obținute în lentilă față de prima suprafață sferică. Însumînd cele două relații obținem :

$$\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} + \frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Cînd $a_1 \to \infty$, rezultă

$$a_2 = f_2 = \frac{n_2}{\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

Cînd $a_2 \to \infty$, obținem

$$a_1 = f_1 = -\frac{n_1}{\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}.$$

Luînd raportul ultimelor două relații, căpătăm $\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}$.

În cazul lentilei divergente calculele sînt analoge.

1.2.17. Prima imagine se va forma la distanța $p_1 = \frac{f_1 p}{p - f} = 110$ cm față de prima lentilă și la distanța $p_2 = p_1 - d = 60$ cm față de a doua. Această imagine joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă și deoarece este situată între focar și lentilă, imaginea finală va fi reală, răsturnată în raport cu obiectul și la distanța $p' = \frac{p_2 f_2}{f_2 - p_2} = 180$ cm față de lentila divergentă.

1.2.18. Fie x distanța de la obiect pînă la prima lentilă. Deosebim patru cazuri : a) Ambele lentile sînt convergente ; în acest caz imaginea se va forma la distanța $p' = \frac{f_1 x}{x - f_1}$ față de prima lentilă și la distanța $p'' = \frac{f_2 (d - x)}{d - x - f_2}$ față de a doua. Deoarece $\frac{o}{i} = \frac{x}{p'}$ și $\frac{o}{i'} = \frac{x + d}{p''}$, iar $i = i'$, rezultă $\frac{x}{p'} = \frac{x + d}{p''}$ și înlocuind de p' și p'' cu valorile lor obținem în final $x = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2} = 120$ cm. b) Ambele lentile sînt convergente ; printr-un raționament analog se obține $x = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2} = 120$ cm. c) Prima lentilă (cu distanța focală f_1) este convergentă, iar a doua divergentă ; se obține $x = \frac{f_1(d + 2f_2)}{f_1 + f_2} = 180$ cm. d) Prima lentilă e divergentă, iar a doua convergentă. Se obține : $x = \frac{f_1(d - 2f_2)}{f_1 + f_2} = 60$ cm.

1.2.19. a) Din $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ rezultă $f = 12$ cm și $C = \frac{25}{3}$ dioptrii. b) Din $C = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$, $f_1 = (n_1 - 1)\frac{2}{R_1}$ și $f_2 = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3R_1}\right)$ rezultă $R_1 = 0{,}65$ m și $R_2 = 3R_1 = 1{,}95$ m ; c) $f_1 = 1{,}6$ m și $f_2 = 0{,}7$ m.

1.2.20. Prima imagine se formează la distanța $p' = \frac{p f}{p - f} = 130$ cm față de lentilă. A doua imagine (cea dată de oglindă) este simetrică față de prima în raport cu oglinda și se află la $q' = 2d - p' = 70$ cm față de centrul optic al lentilei. Imaginea

finală se află la distanța $q = \frac{q'f}{q'-f}$ față de lentilă. În cazul aplicației numerice rezultă $q = 175$ cm. Dacă imaginea finală coincide cu punctul luminos, $q = p$ și $d = p' = 70$ cm.

1.2.21. Se aplică succesiv formula lentilelor $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$. Pentru prima lentilă: $\frac{1}{10} + \frac{1}{p_1'} = -\frac{1}{5}$ de unde $p_1' = -\frac{10}{3}$ cm. Distanța primei imagini față de L_2 este $p_2 = p_1' + d_1 = 10$ cm astfel încît din $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{5}$ se obține $p'_2 = 10$ cm. Imaginea dată de L_2 constituie deci un obiect virtual pentru L_3 și $p_3 = -5$. Din $\frac{1}{5} + \frac{1}{p_3'} = -\frac{1}{5}$ se obține $p_3' = \infty$ deci razele emergente din L_3 sînt paralele cu axa optică. Aceste raze converg evident în focarul lentilei L_4 situat la 5 cm în dreapta acestei lentile.

1.2.22. Distanța maximă la care se poate forma imaginea unui obiect față de o lentilă este infinită. Aceasta înseamnă că imaginea intermediară dată de L_3 trebuie să se formeze în focarul F_2' al lentilei L_2. Deoarece L_3 este divergentă, trebuie ca imaginea dată de L_1 să joace rol de obiect virtual pentru L_3 astfel încît notînd cu x distanța dintre L_1 și L_3, avem $p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 30$ cm și $-\frac{1}{p_1' - x} + \frac{1}{l - f_2 - x} = -\frac{1}{f_3}$, de unde $x = 27{,}06$ cm.

1.2.23. Distanța focală a fiecărei lentile este $f = \frac{r}{2(n-1)} = 2$ m, iar a sistemului format (în absența apei) este $F = \frac{f}{2} = 1$ m. Imaginea obiectului se va forma astfel la distanța $p' = \frac{pF}{p-f} = 2$ m față de sistem. În prezența apei, sistemul va fi echivalent cu trei lentile alăturate, dintre care cea divergentă (cu apă), va avea distanța focală $f' = -\frac{r}{2(n'-1)} = -3$ m. În acest caz distanța focală F' a sistemului este dată de $\frac{1}{F'} = \frac{2}{f} - \frac{1}{f'}$, de unde $F' = \frac{2}{3}$ m.

Imaginea se va forma acum la distanța $p'' = \frac{pF'}{p-F'} = 6$ m față de sistem. Deplasarea imaginii este deci $\Delta p = p'' - p' = 4$ m.

1.2.24. Cînd sistemul lentilă-obiect se găsește în aer, distanța focală f_1 a lentilei este dată de $\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, iar cînd sistemul se află în lichid avem: $\frac{1}{f_2} = (n''-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, unde $n'' = \frac{n}{n'} = 1{,}5$ reprezintă indicele de refracție relativ al lentilei față de lichid. Prin împărțire, obținem: $f_1 = \frac{n''-1}{n-1} f_2 = 5$ cm. Din formula lentilelor $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ și $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'+d}$ prin eliminarea lui p' și înlocuirea mărimilor f_1, f_2 și d cu valorile lor numerice, se obține ecuația: $9p^2 - 130p + 400 = 0$ cu rădăcinile $p_1 = 10$ cm și $p_2 = \frac{40}{9}$ cm. Pentru p' se obțin de asemenea două valori: $p_1' = 10$ cm (imagine reală) și $p_2' = -40$ cm (imagine virtuală).

1.2.25. Distanța focală a lentilelor biconvexe se obține din $\frac{1}{f_1} = (n-1)\frac{2}{R}$ și este $f_1 = f_2 = 20$ cm; analog pentru lentila divergentă (cu apă) $f_3 = -30$ cm. Distanța focală f a sistemului se obține din $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$ și este $f = 15$ cm. Din relațiile cunoscute $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ și $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$, rezultă apoi $p' = 20$ cm și $i = 1$ cm.

1.2.26. Convergențele lentilelor sînt $C_1 = \frac{1}{f}$ și $C_2 = \frac{1}{3f}$, iar pentru întregul sistem $C = C_1 + C_2 - d\,C_1 C_2 = \frac{2}{3f}$. Distanța focală a sistemului este deci $F = \frac{1}{C} = \frac{3}{2} f$. Pozițiile planelor principale sînt date de abscisele $x_p = d\,\frac{C_1}{C} = 3f$ și $x_p' = d\,\frac{C_2}{C} = f$.

1.2.27. a) Fie p_1, p_1' respectiv $p_2 = p_1 + a$ și p_2' distanțele obiect-lentilă, lentilă-ecran în cele două cazuri. Din $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{p_1 + a} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_1}$ și din $\frac{i}{o} = \frac{p_1'}{p_1}$; $\frac{i'}{o} = \frac{p_2'}{p_1 + a}$ rezultă un sistem cu necunoscutele p_1, p_1', p_2', f_1, de unde $p_1 = 25$ cm; $p_1' = 100$ cm; $f_1 = 20$ cm. b) Din $\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ rezultă: $n = 1{,}5$. c) Imaginea dată de prima lentilă joacă un rol de obiect real pentru a doua lentilă și se află la distanța $p = d - p_1' = 10$ cm față de aceasta. Imaginea finală (virtuală) se va forma la distanța $p' = \frac{pf_2}{p - f_2} = -15$ cm față de a doua lentilă și la distanța $l = d - |p'| = 95$ cm față de prima. d) Din $\frac{i''}{i} = \frac{p'}{p}$ rezultă $i'' = -30$ cm.

1.2.28. a) În aer: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, iar în apă $\frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, de unde $f' = f\frac{n-1}{\frac{n}{n_1} - 1} = 35{,}3$ cm.

b) În sulfură de carbon $f'' = f\frac{n-1}{\frac{n}{n_2} - 1} = -86{,}4$ cm, iar caracterul convergenței lentilei se schimbă (dacă lentila era convergentă, devine divergentă și invers).

1.2.29. Avem $f_{apă} = f_{aer}\frac{n-1}{\frac{n}{n'} - 1} = 4 f_{aer}$ (vezi problema 1.2.28). Din formulele lentilelor pentru cele două situații (în aer și în apă) rezultă $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{aer}}$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{p''} = \frac{1}{4f_{aer}}$ (p este distanța de la obiect la lentilă). Scăzînd ultimele două relații se elimină p și rezultă $f_{aer} = 9$ cm.

1.2.30. a) Distanța focală este $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 0{,}02$ m, iar $C = \frac{1}{f} = 50$ dioptrii. b) Din $\frac{1}{f_3} = \frac{1}{d_1 - f} + \frac{1}{d_2}$ se obține $f_3 = \frac{40}{13}$ cm.

c) Distanța este $x = f + f_3 = \frac{66}{13}$ cm.

1.2.31. a) Din $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$ rezultă $f = 20$ cm; apoi folosind $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ și $\frac{i_1}{o} = \frac{p'}{p}$, rezultă (fig. 1.2.31 R) $p' = -60$ cm (imagine

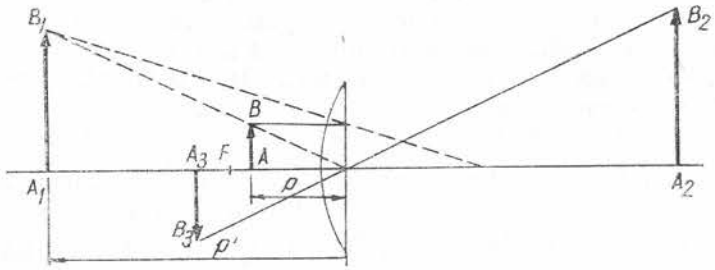


Fig. 1.2.31 R

virtuală) și $i_1 = 20$ cm (imagine dreaptă). b) Imaginea A_1B_1 dată de lentilă cînd fața plană este neargintată, servește ca obiect virtual pentru oglinda plană (fața argintată) dînd imaginea A_2B_2 la dreapta oglinzii (simetrică față de A_1B_1 în raport cu oglinda). Imaginea A_2B_2 servește apoi ca obiect pentru lentilă, dînd imaginea A_3B_3: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'}$; $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{p_2'}{p'}$. Rezultă $p_2' = 30$ cm și $i_2 = -10$ cm. Deci imaginea finală este reală, răsturnată și de două ori mai mare decît obiectul.

1.2.32. a) În absența lentilei divergente L_2, punctul de convergență ar fi chiar focarul F_1 al lentilei convergente. Lentila diver-

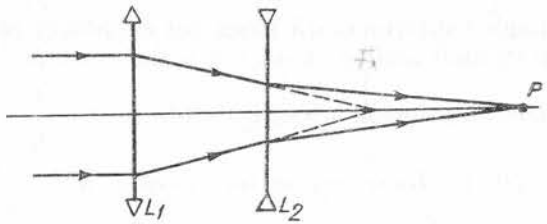


Fig. 1.2.32 R

gentă deplasează în P punctul de convergență (fig. 1.2.32 R) cu distanța $D = F_1P$. Ținînd seama că F_1 este obiect pentru lentila

divergentă, iar P este imaginea lui F_1, din formula distanțelor $-\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_1 - d + D}$, se obține $D = \frac{(f_1 - d)^2}{f_2 + d - f_1}$.

Discuție: 1) Dacă $d = f_1$, rezultă $D = 0$, deci P va coincide cu F_1 (prezența lentilei divergente nu modifică poziția punctului de convergență). 2) Dacă $d = 0$ și $f_1 = f_2$ efectele celor două lentile se cumulează reciproc astfel încît convergența sistemului este nulă. 3) Dacă $f_2 + d = f_1$ (focarele celor două lentile coincid), atunci punctul P se deplasează la infinit. 4) Dacă $f_2 + d > f_1$, rezultă $D > 0$; 5) Dacă $f_2 + d < f_1$ rezultă $D < 0$ (deplasările punctului P se consideră în raport cu F_1).

b) În acest caz trebuie ca $f_2 + d = f_1$ și din asemănarea triunghiurilor $C_1I_1F_{1,2}$ și $C_2I_2F_{1,2}$ obținem $\frac{C_1F_{1,2}}{C_2F_{1,2}} = \frac{I_1I_1'}{I_2I_2'}$ sau $\frac{f_1}{f_2} = \frac{8}{2} = 4$ astfel încît rezolvînd sistemul $\frac{f_1}{f_2} = 4$, $f_2 + d = f_1$ rezultă $f_2 = 4$ cm, $d = 12$ cm.

1.2.33. Meniscul convergent are distanța focală $f_1 = 20$ cm, dată de $\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. a) Lentilele fiind în contact se vor comporta ca o singură lentilă cu distanța focală f, dată de $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, de unde se obține $f = \frac{60}{7}$ cm. Cunoscînd $p = 30$ cm și $o = 3$ cm se obține $p' = 12$ cm și $i = 1{,}2$ cm. b) În raport cu prima lentilă imaginea intermediară se va forma la distanța $p_1' = 60$ cm și va avea înălțimea $i_1 = 6$ cm (așa cum rezultă din $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}$; $\frac{i_1}{o} = \frac{p_1'}{p_1}$).

Această imagine intermediară joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lentilă și în mod analog se obține $p_2' = -30$ cm; $i_2 = 18$ cm.

1.2.34. a) Distanța focală a lentilei se obține din $\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{1}{R}$ și este $f_1 = -20$ cm. Imaginea se formează la $p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 10$ cm față de lentilă, deci este virtuală și are mărimea $i_1 = -o\frac{p_1'}{p_1} = 4$ cm, fiind dreaptă în raport cu obiectul (fig. 1.2.34 *R*, *a*). b). În acest caz există trei lentile, dintre care două (cele divergente) au aceeași

distanță focală $f_1 = f_2 = -20$ cm, iar una (cea convergentă, cu apă) are distanța focală f_3 dată de $\frac{1}{f_3} = (n-1)\frac{2}{R}$ adică $f_3 = 15$ cm. Distanța focală f a sistemului se obține din $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$ și este

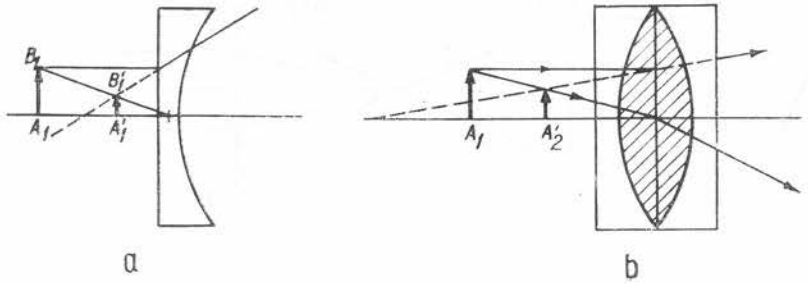


Fig. 1.2.34 R

$f = -30$ cm. Analog cu cazul a) rezultă apoi $p_2' = 12$ cm (imagine virtuală) și $i_2 = 4{,}8$ cm. Mersul razelor în acest caz e arătat în fig. 1.2.34 R,b.

1.2.35. a) Conform datelor din problemă și cu notațiile din fig. 1.2.35 R, avem $l = f_1 + b + a + f_2$ și din relația Newton $ab = f_1^2$ obținem în urma înlocuirilor numerice, sistemul: $ab = 64$ și $a + b = 20$, de unde rezultă $a = 16$ cm, $b = 4$ cm, respectiv $a = 4$ cm și $b = 16$ cm. Deosebim așadar două cazuri: 1) $a = 16$ cm și $b = 4$ cm; se vede că $p = a + f_1 = 24$ cm; $p' = b + f_1 = 12$ cm și $p_1 = a + f_2 = 26$ cm. Din $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_2}$ obținem $p_1' = 16{,}25$ cm.

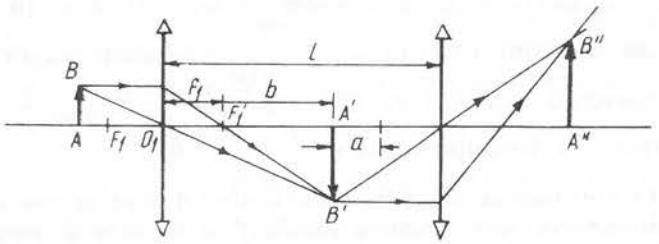


Fig. 1.2.35 R

2) $a = 4$ cm și $b = 16$ cm; se obține: $p = 12$ cm, $p' = 24$ cm, $p_1 = 14$ cm, $p_1' = 35$ cm.

b) Din formulele măririi liniare: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{p'}{p}$ și $\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{p_1'}{p_1}$

obținem $\frac{A''B''}{AB} = \frac{p'p_1'}{p\,p_1}$ și ținînd seama de rezultatele anterioare se obține $\frac{A''B''}{AB} = \frac{5}{16}$, respectiv $\frac{A''B''}{AB} = 5$.

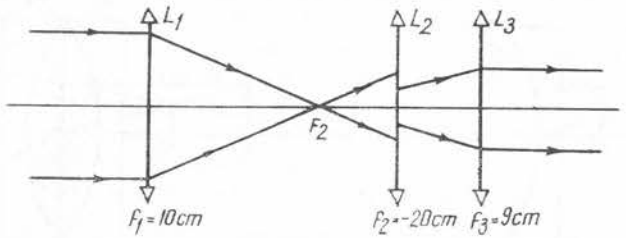


Fig. 1.2.36 R

1.2.36. Razele paralele care cad pe lentila L_1 converg în focarul F_1 al acestei lentile, la $p_2 = 5$ cm față de lentila L_2. Punctul F_2 este obiect pentru lentila L_2 și imaginea sa se află la $p_2' = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} =$ $= -4$ cm față de L_2 și la $p_3 = 9$ cm față de L_3. Deoarece $f_3 =$ $= 9$ cm, imaginea finală se va forma la infinit, adică sistemul considerat este telescopic (fig. 1.2.36 R).

1.3.1. Distanța minimă a vederii clare pentru un ochi normal este $d_m = 25$ cm, căreia îi corespunde o convergență $C_{normal} = \frac{1}{0{,}25} = 4$ dioptrii realizată prin acomodare. Pentru prezbit, cu acomodare, distanța minimă a vederii clare este $d = 40$ cm, deci convergența ochiului este $C_{prezbit} = \frac{1}{0{,}40} = 2{,}5$ dioptrii. Pentru corijare este necesară o lentilă cu convergența $C = C_{normal} - C_{prezbit} =$ $= 1{,}5$ dioptrii, și distanța focală de $f = \frac{1}{C} = 0{,}66$ m.

1.3.2. Ochiul normal aflat în repaus, atunci cînd privește obiecte foarte îndepărtate, are distanța focală $f = 15$ mm și convergența $C = \frac{1000}{15}$ dioptrii. Dacă obiectul se află la o distanță p față de centrul său optic, distanța focală variază, dar imaginea trebuie să se formeze tot pe retină, adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{f} = C'$, de unde $C' = C + \frac{1}{p}$. Mărirea convergenței este deci $\Delta C = C' - C = \frac{1}{p}$. Se obține $\Delta C_1 = 1$ dioptrie; $\Delta C_2 = 4$ dioptrii; $\Delta C_3 = 10$ dioptrii.

1.3.3. Pentru a corecta miopia, în fața ochiului se plasează o lentilă divergentă L_1. Din fig. 1.3.3 R, se vede că distanța focală

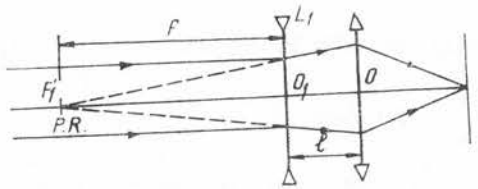


Fig. 1.3.3 R

$f = O_1F_1'$ a acestei lentile trebuie să fie egală cu distanța de la centrul optic O_1 la punctul remotum al ochiului. Deoarece $f = D_m -$ $- l = 0{,}98$ m rezultă $C = \frac{1}{f} = -1{,}02$ dioptrii. Față de L_1 punctul proximum se află la distanța $p = d_m - l = 8$ cm și notînd cu p' distanța pînă la L_1 a imaginii punctului proximum în lentila L_1 (imagine virtuală), din $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ scoatem $p' = \frac{fp}{f-p} = 8{,}71$ cm. Față de ochi, imaginea punctului proximum se va afla la distanța $d_m' = p' + l = 10{,}71$ cm, care reprezintă distanța minimă a vederii clare în acest caz.

1.3.4. a) Ochiul normal devenit prezbit vede clar obiectele îndepărtate, deci punctul remotum se află la infinit. Ochiul normal în stare de repaus și care privește la infinit, are distanța focală $f = 15$ mm și convergența $C = \frac{1}{f} = 67$ dioptrii. Convergența ochiului prezbit este $C' = C + \Delta C = 68$ dioptrii și distanța minimă a vederii clare d_m se obține din: $\frac{1}{d_m} + C = C'$, de unde $d_m = 1$ m.

b) În acest caz trebuie ca imaginea obiectului să se formeze la infinit, adică acesta să fie plasat în focarul lentilei. Distanța focală a lentilei este așadar $f = d - l = 0{,}23$ m, iar convergența sa $C = \frac{1}{f} = 4{,}35$ dioptrii.

1.3.5. a) Față de lentila ochelarilor obiectul se află la $p = d - l = 24$ cm, iar imaginea trebuie să se formeze la $p' = 45 - l = 44$ cm. Din $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ rezultă convergența lentilei cînd obiectul se află la distanța minimă a vederii clare : $C = \frac{1}{f} = 1{,}89$ dioptrii. Cînd obiectul se află la infinit $C' = \frac{1}{p} = 4{,}17$ dioptrii.

b) $C = P = \frac{\alpha}{h} = 20$ dioptrii.

1.3.6. a) $P = \frac{\alpha}{o} = 50$ dioptrii, $G = Pd_m = 5$. b) Deoarece observarea se face fără acomodare, puterea lupei este egală cu convergența sa, de unde $f = \frac{1}{p} = 2$ cm.

1.3.7. a) Imaginea este reală, deoarece poate fi prinsă pe un ecran și trebuie să se formeze la dublul distanței focale întrucît este egală în mărime cu obiectul. De aici rezultă că distanța focală a lentilei este $f = \frac{d}{4} = 2$ cm. Fie $p < f$ distanța de la obiect la lupă și p' distanța de la imaginea (virtuală) la lupă. Avem $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ și așa cum se vede din fig. 1.3.7 R, $p' = d_m - f = 18$ cm, așa încît $p = \frac{18}{10}$ cm. Grosismentul este $G = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = 10$. Puterea este $P = \frac{G}{d_m} = 50$ dioptrii.

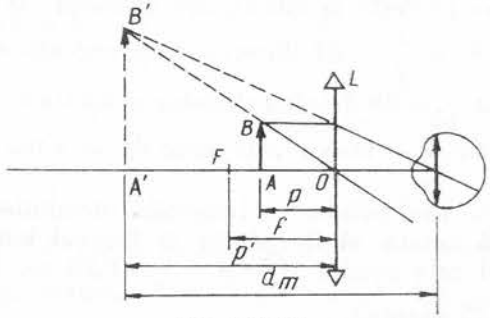


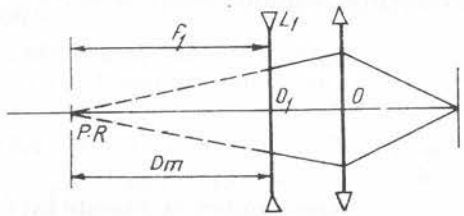
Fig. 1.3.7 R

b) $AB = \frac{\alpha}{P} = 1$ mm ; c) În acest caz $p' = d_m - l = 51$ cm și deoarece $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ rezultă $p = \frac{30}{17}$ cm, iar $G = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{17}{2}$ și $P = \frac{G}{d_m} = 42{,}5$ dioptrii.

1.3.8. a) Ochiul este miop, deoarece nu poate vedea clar obiectele îndepărtate. Defectul se corectează cu ajutorul unei lentile divergente L_1, plasată astfel încît focarul său să coincidă cu punctul remotum ; distanța focală a lentilei este deci $f = D_m - l = 12{,}5$ cm.

b) În primul caz, punctul cel mai apropiat se află față de ochi la distanța $p = d'_m - l = 11$ cm și din $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ rezultă $p' = 92$ cm, așa încît față de ochi obiectele care mai pot fi clar percepute se află la distanța minimă $\delta = p' + l = 93$ cm. În al doilea caz punctul cel mai îndepărtat se află la distanța $p = D'_m - l = 12{,}5$ cm față de lentilă și deoarece $p = f$, imaginea se formează la infinit.

1.3.9. a) Deoarece ochiul nu vede clar obiectele aflate la infinit, se comportă ca un ochi miop, iar corectarea se face cu o lentilă divergentă plasată astfel încît focarul său să se afle în punctul remotum, adică la $D_m = 1$ m față de ochi (fig. 1.3.9 R). Distanța sa focală este deci $f_1 = D_m$, iar convergența este $C_1 = -\frac{1}{f_1} = -1$ dioptrie.



Eig. 1.3.9 R

b) În absența lentilelor, pentru observarea obiectelor aflate la distanța minimă a vederii clare ($d_m = 0{,}4$ m), convergența ochiului este $C = \frac{1}{d_m} + \frac{1}{f}$, unde $f = 15 \cdot 10^{-3}$ m. Împreună cu L_1 și L_2,

ochiul formează un sistem de trei lentile alipite a cărui convergență este $C_1 + C_2 + C = \frac{1}{d'_m} + \frac{1}{f}$, de unde rezultă $C_2 = +3{,}5$ dioptrii.

1.3.10. a) Puterea intrinsecă a lupei este $P_i = 4\,G_c = 10$ dioptrii, iar distanța sa focală $f = \frac{1}{P} = 10$ cm. Obiectul se află așadar la distanța $p = f - d = 5$ cm față de lupă, așa încît imaginea este virtuală și se află la $p' = \frac{pf}{f-5} = 10$ cm față de L. Înălțimea imaginii este $A'B' = AB\frac{p'}{p} = 2$ mm. Diametrul aparent β sub care ochiul (plasat în focarul F) vede obiectul este deci: $\beta = \frac{A'B'}{p'+f} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}$ radiani. Puterea lupei este $P = \frac{\beta}{AB} = 13{,}3$ dioptrii. Dacă obiectul s-ar afla în focar, puterea ar fi egală cu cea intrinsecă ($P_i = 10$ dioptrii), astfel încît $P = \frac{4}{3} P_i$. c) Grosismentul este $G = P \cdot d_m = 2$; în cazul ochiului miop $G' = P \cdot d'_m = 1$. În acest caz privind prin lupă, ochiul n-ar mai trebui să se acomodeze.

1.3.11. a) Convergența ochiului este: $R = -\frac{1}{0{,}40} = -2{,}5$ dioptrii. Acomodarea trebuie să fie de 4 dioptrii, deci punctul proxim va fi

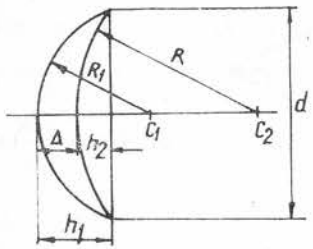


Fig. 1.3.11 R

$P = A + R = 4 + (-2{,}5) = +1{,}5$ dioptrii.

Acest punct se găsește față de ochi la distanța: $D_p = \frac{1}{P} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66$ m.

b) Lentila care corijează această defecțiune are convergența egală și de sens contrar cu distanța dioptrică a punctului remotum, deci de $+2{,}5$ dioptrii. Raza de curbură a meniscului concav este: $R_2 = \frac{1}{3} = 0{,}333$ m, iar a meniscului convex se determină din relația: $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, de unde $R_1 = \frac{(n-1)(R_2)}{CR_2 + (n-1)} = 0{,}124$ m.

c) Din fig. 1.3.11 R se vede că grosimea la centrul lentilei, față de margini este $\Delta = h_1 - h_2$, iar din geometrie se cunoaște că: $d^2 = 8R_1h_1 - h_1^2$; $d^2 = 8R_2h_2 - h_2^2$. Rezolvînd ecuațiile, găsim pentru soluțiile admise valorile $h_1 = 0{,}001616$ m și $h_2 = 0{,}000608$ m. Grosimea la centrul lentilei este așadar $\Delta = h_1 - h_2 = 1{,}008 \cdot 10^{-3}$ m.

1.3.12. Ochiul plasat în O vede imaginea virtuală $A'B'$ a obiectului AB sub unghiul α dat de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{A'B'}{OA'}$ (fig. 1.3.12 R, a). Dacă

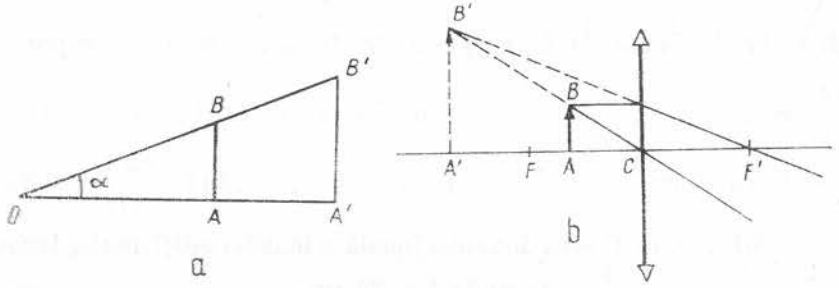


Fig. 1.3.12 R

$OA' \geqslant d_m$ ($d_m \approx 15$ cm e distanța minimă a vederii clare), putem aproxima $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{A'B'}{OA'}$. Cele două puncte extreme A' și B' sînt percepute distinct, dacă α este egal sau mai mare decît puterea separatoare a ochiului $\left(\beta = 2' = \frac{\pi}{5\,400}\text{ rad}\right)$, adică

$$\frac{A'B'}{OA'} \geqslant \beta \text{ sau } A'B' \geqslant OA'\,\beta. \qquad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice asemenea $F'A'B'$ și $F'CI$ (fig. 1.3.12 R, b), putem scrie $\frac{A'B'}{CI} = \frac{F'A'}{F'C}$, de unde deducem $A'B' = \frac{AB \cdot F'A'}{f}$, unde $f = \frac{1}{C} = \frac{1}{50} = 0{,}02$ m. Înlocuind în (1) se obține $AB \geqslant \beta f \frac{OA'}{F'A'}$. Valoarea minimă a lui AB este deci $(AB)_{min} = \beta f \frac{OA'}{F'A'}$ sau $(AB)_{min} = \beta f\left(1 + \frac{OF'}{F'A'}\right)$. Sînt posibile următoarele cazuri:

a) $OF' = 0$ și $(AB)_{min} = \beta f = 11{,}6$ μm;

b) $F'A' = \infty$ și $(AB)_{min} = \beta f = 11{,}6$ μm;

c) $OF' < 0$ (ochiul este între F' și C). În acest caz

$$\beta f\left(1-\frac{F'O}{F'A'}\right)=\beta f\left(1-\frac{1}{1+\dfrac{OA'}{F'O}}\right).$$

Ochiul se poate deplasa din F' în C, deci $F'O$ poate crește de la 0 la 2 cm. Distanța OA' poate varia între $d_m = 15$ cm și infinit. Pentru o valoare dată a lui OA', raportul $\dfrac{OA'}{F'O}$ descrește regulat de la infinit la $\dfrac{a}{2}$, cînd $F'O$ crește de la 0 la 2. Minimul raportului $\dfrac{OA'}{F'O}$ este deci $d_m = 15$, valoare obținută cînd $OA' = 15$ cm. Ochiul se află atunci pe lentilă. În acest caz $(AB)_{min} = \beta f\left(1-\dfrac{2}{17}\right) = 10{,}8$ μm.

1.3.13. Dacă f' este distanța focală a lentilei adiționale, trebuie ca $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1}{f}+\dfrac{1}{f'}$, de unde $f = 30$ cm.

1.3.14. Dacă I_1 este imaginea punctului P_1 așezat la $p_1 = 5$ m

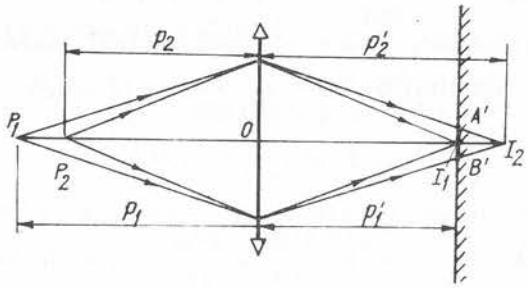


Fig. 1.3.14 R

față de obiectivul AB, cu notațiile din fig. 1.3.14 R, avem $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_1'}$, de unde $p_1' = \dfrac{5}{24}$ m. Analog, pentru punctul P_2 așezat la distanța $p_2 = p_1 - a = 4{,}5$ m față de obiectiv, rezultă $p_2' = \dfrac{p_2 f}{p_2 - f}=\dfrac{9}{43}f$. Imaginea I_2 a punctului P_2 fiind mai depărtată,

pe geamul mat G se va obține segmentul $A'B'$ a cărui mărime depinde de diafragma AB a obiectivului. Din triunghiurile asemenea $I_2A'B'$ și I_2AB, se obține $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{I_1I_2}{OI_2}=\dfrac{p_2'-p_1'}{p_2'}=\dfrac{1}{216}$ și deoarece $A'B' = l = 0{,}1$ mm, rezultă $AB = 21{,}6$ mm.

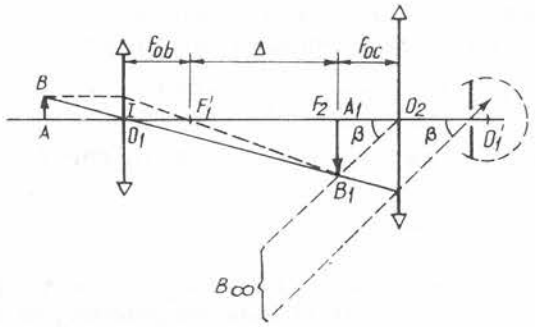


Fig. 1.3.15 R

1.3.15. Se scrie puterea sub forma $P = \dfrac{\beta}{l} = \dfrac{l'}{l}\cdot\dfrac{\beta}{l'}$, unde $\dfrac{l'}{l} = \gamma_{ob}$ reprezintă mărirea liniară a obiectivului, iar $\dfrac{\beta}{l'} = P_{oc}$ este puterea ocularului. Deci $P = \gamma_{ob}\cdot P_{oc}$. În cazul punerii la punct pentru infinit, așa cum se vede din fig. 1.3.15 R imaginea A_1B_1 dată de obiectiv se formează în planul focal F_2 al ocularului și din triunghiurile asemenea $F_1'O_1I$ și $F_1'A_1B_1$ se obține $\dfrac{A_1B_1}{O_1I}=\dfrac{F_1'F_2}{F_1'O_1}$ și deoarece $O_1I = AB$, $F_1'F_2 = \Delta$, iar $F_1'O_1 = f_{ob}$ obținem $\gamma_{ob}=\dfrac{\Delta}{f_{ob}}$. Pe de altă parte, în acest caz

$$P_{oc}=\frac{1}{f_{oc}},\ \text{deci}\ \ P_i=\gamma_{ob}\cdot P_{oc}=\frac{\Delta}{f_{ob}\cdot f_{oc}}.$$

1.3.16. a) $G=\dfrac{f_{ob}}{f_{oc}}=\dfrac{C_2}{C_1}=25$; b) Deoarece $G=\dfrac{\beta}{\alpha}$ rezultă $\beta = 0{,}05$ radiani.

1.3.17. Deoarece ochiul se află în repaus, puterea microscopului coincide cu puterea sa intrinsecă și din relația de definiție (27) ob-

ținem $\beta = P \cdot l = 10^{-3}$ m. Pe de altă parte, din datele problemei rezultă $\beta = \frac{h}{d_m}$, de unde $h = \beta d_m = 0{,}25$ mm.

1.3.18. a) Distanța focală a obiectivului este $f_{ob} = \frac{1}{C} = 1$ cm și deoarece aparatul e pus la punct pentru infinit, imaginea obiectului, dată de obiectiv se formează la distanța $p' = f_{ob} + \Delta = 17$ cm față de acesta. Din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{oc}}$ rezultă apoi $p = \frac{17}{16}$ cm și deci mărirea obiectivului este $\gamma_{ob} = \frac{p'}{p} = 16$. b) Din $P = \frac{\Delta}{f_{ob} \cdot f_{oc}} = 4\,G_c$ se obține: $f_{oc} = \frac{\Delta}{4\,G_c \cdot f_{ob}} = 2{,}5$ cm.

1.3.19. a) Punerea la punct fiind realizată pentru infinit trebuie ca imaginea obiectului dată de obiectiv, să se formeze în focarul ocularului (fig. 1.3.15 R). Față de obiectiv, imaginea intermediară se află deci la distanța $p' = d - f_{oc} = 19{,}6$ cm. Din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{ob}}$ rezultă $p = \frac{p' f_{ob}}{p' - f_{ob}} = 1{,}74$ cm.

b) $\gamma = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = 11{,}3$; c) Puterea (care coincide în cazul de față cu puterea intrinsecă) este $P = \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{d - f_{ob} - f_{oc}}{f_1 f_2} = 450$ dioptrii, iar grosismentul este $G = P \cdot d_m = 112{,}5$. Analog $G_c = 112{,}5$.

1.3.20. a) $f_{ob} = \frac{P_i f_{oc}}{\Delta} = \frac{P_i f_{oc}}{l - f_{oc}} = 5$ mm; b) Fie p distanța căutată și p' distanța de la imaginea obținută în obiectiv pînă la O; atunci

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{ob}}. \qquad (1)$$

Imaginea dată de obiectiv joacă rol de obiect pentru ocular și se află la distanța $p_1 = l + f_{ob} - p'$ față de acesta (fig. 1.3.20 R). Dacă imaginea finală se formează la $d_m = 180$ mm față de ochi, distanța acestei imagini pînă la O' este $p_1 = d_m - f_{oc} = 150$ mm și deci

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_{oc}}. \qquad (2)$$

Din sistemul format de ecuațiile (1) și (2), căpătăm $p = 5{,}135$ mm. Analog pentru $p_1'' = D_m - f_{oc} = 370$ mm se obține $p = 5{,}137$ mm. c) Dimensiunea maximă se obține cînd $p = 5{,}135$ mm; în acest caz distanța de la imaginea dată de O și pînă la obiectiv, este $p' = 116{,}11$ mm. Mărimea imaginii i este însă limitată de diametrul diafragmei,

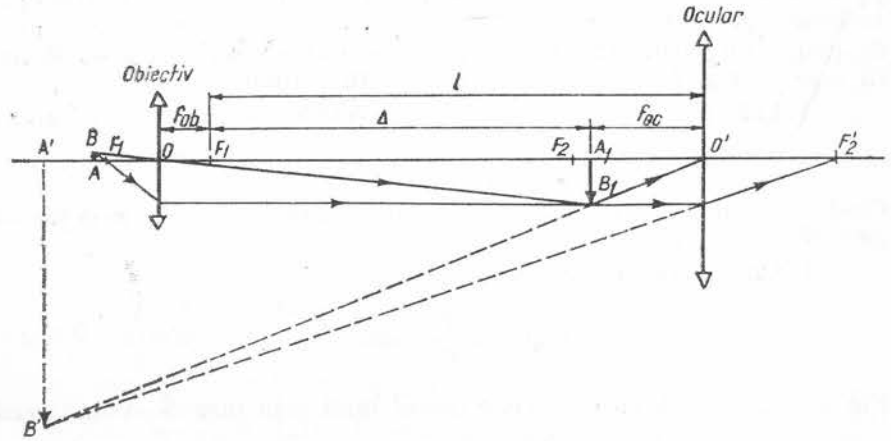


Fig. 1.3.20 R

adică trebuie ca $i = d = 4$ mm. Din $\frac{o}{i} = \frac{p}{p'}$ rezultă apoi $o = 93$ μm. d) Printr-un raționament analog cu cel de la punctul b) obținem $s = 5{,}140$ mm și $\gamma = 1{,}158$.

1.3.21. a) Mersul razelor prin microscop e dat în fig. 1.3.15 R; $P = \frac{\Delta}{f_{ob} \cdot f_{oc}} = 1\,800$ dioptrii. b) În cazul punerii la punct pentru infinit, distanța de la obiectiv la prima imagine formată A_1B_1 este $p' = f_{ob} + \Delta = 18{,}5$ cm și din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{ob}}$ rezultă $p = 5{,}139$ mm. Mărimea primei imagini A_1B_1 se obține din $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{p}{p'}$ și este $A_1B_1 = 3{,}6$ mm. Din triunghiul A_1B_1O' se obține apoi $\beta = \frac{A_1B_1}{f_{oc}} = 0{,}018$ radiani. c) Imaginea finală trebuie să se formeze la distanța $p_2' = D - l - f_{oc} = 8$ cm față de ocular. Imaginea intermediară A_1B_1 se va forma la distanța $p_2 = 1{,}6$ cm față de ocular, dată de

$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_{oc}}$. Față de obiectiv, imaginea A_1B_1 se va forma la distanța $p_1' = f_{ob} + f_{oc} + \Delta - p_2 = 18{,}9$ cm. Obiectul trebuie în acest caz plasat la distanța p_1 față de ocular, dată de $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_{ob}}$. Se obține $p_1 = 5{,}137$ mm. Comparînd cu cazul a) rezultă că microscopul trebuie apropiat de ochi cu distanța $d = p - p_1 = 0{,}001$ mm. d) Printr-un raționament analog cu cel de la punctul a), se obține în acest caz $A'B' = 2{,}2$ mm și $\alpha'' = 0{,}02$ radiani.

1.3.22. Fie p și p' distanțele obiectului și imaginii în raport cu obiectul. Avem $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$. Inițial $p = \infty$ și $p' = f = 50$ cm. Cînd $p_1 = 50$ m obținem $p_1' = 50{,}5$ cm, deci ocularul trebuie deplasat cu $\Delta l = p_1' - p' = 0{,}5$ cm.

1.3.23. Grosismentul lunetei este

$$G = \frac{f'}{f''} = 25.$$

Fie α unghiul sub care se vede discul lunii prin lunetă. Vom avea

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 25 \operatorname{tg} 15', \text{ de unde } \alpha = 12°27'2''.$$

Fie Δl deplasarea ocularului. Avem

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f' + \Delta l}$$

unde $d = 50$ m. Rezultă $\Delta l = 0{,}5$ cm.

1.3.24. Luneta considerată fiind un sistem telescopic (transformă un fascicul paralel de raze tot într-un fascicul paralel, dar mai

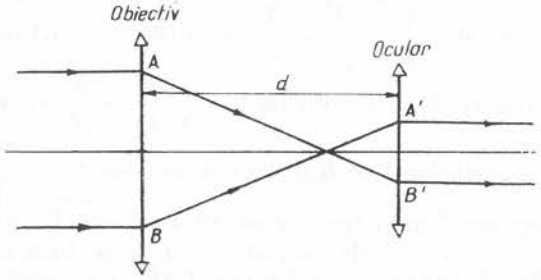


Fig. 1.3.24 R

îngust), focarul posterior al obiectivului coincide cu focarul anterior al ocularului (fig. 1.3.24 R); dacă d este distanța obiectiv-ocular, există deci relația $d = f_1 + f_2 = 64$ cm. În apă, distanțele focale ale obiectivului și ocularului devin (vezi problema 1.1.24) $f_1' = f_1 \frac{n-1}{\frac{n}{n'} - 1} = 240$ cm și $f_2' = 16$ cm, astfel încît $f_1' + f_2' \neq d$.

Pentru ca sistemul să rămînă telescopic și în apă trebuie ca obiectivul să fie schimbat cu altul, a cărui distanță focală în apă să fie $f_1'' = d - f_2' = 48$ cm, în aer distanța sa focală fiind $f_1''' = 12$ cm. Mărirea lunetei va fi în acest caz $G = \frac{f_1''}{f_2'} = 3$.

1.3.25. a) $C_{oc} = \frac{1}{f_{oc}} = \frac{G}{f_{ob}} = 50$ dioptrii. b) Deoarece imaginea se formează pe placa fotografică, trebuie să fie reală și deci ocularul trebuie îndepărtat cu distanța d față de obiectiv. Distanța imaginii intermediare pînă la ocular este $p = f_{oc} + d$ și din $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_{oc}}$; $\frac{p'}{p} = 5$ se obține $d = 4$ mm și $p' = 12$ cm. c) Mărimea imaginii dată de obiectiv trebuie să fie $A_1B_1 = \frac{d_m}{5} = 6 \cdot 10^{-5}$ cm și deci distanța unghiulară dintre cele două stele este $\alpha = \frac{A_1B_1}{f_{ob}} = 1''$. Dacă placa fotografică s-ar afla în planul focal al obiectivului, imaginea dată de obiectiv ar fi egală cu d_m și $\alpha' = \frac{d_m}{f_{ob}} = 5''$.

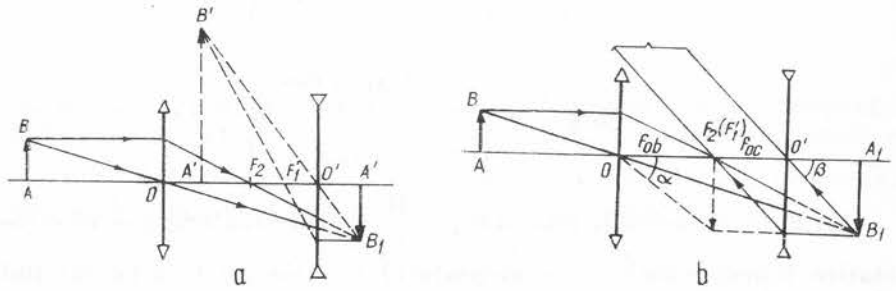
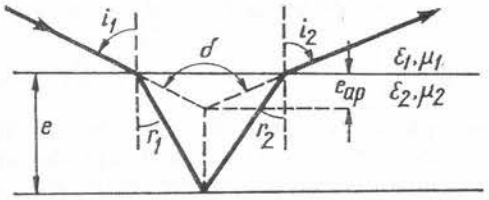


Fig. 1.3.26 R

1.3.26. a) Mersul razelor de lumină în luneta Galilei este arătat în fig. 1.3.26 R, a. b) Pentru a realiza o lunetă Galilei afocală,

trebuie ca focarele F_2 și F_1' să coincidă. În acest caz $OO' = f_{ob} + f_{oc} = 35$ cm. c) Din figura b rezultă că $\alpha = \frac{A_1 B_1}{f_{ob}}$ și $\beta = \frac{A_1 B_1}{f_{oc}}$ așa încît $G = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = 2{,}5$. d) Diametrul aparent al turnului văzut cu ochiul liber este $\alpha = \frac{h}{D} = 0{,}025$ radiani. Prin lunetă, turnul se observă sub unghiul $\beta = G\alpha = 6{,}25 \cdot 10^{-2}$ radiani.

e) Printr-un raționament analog cu cel din problema 1.3.25, se ajunge la concluzia că ocularul trebuie apropiat de obiectiv cu $l = 1{,}1$ cm.



Eig. 2.1.1 R

2.1.1. Întrucît $r_1 = r_2$ (fig. 2.1.1 R), $i_1 = i_2$ și $\delta = i_1 + i_2 = 2i_1$. Rezultă

$$\sin r_1 = \sin r_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = \frac{v_2}{v_1} \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\mu_1}{\mu_2}} \sin \frac{\delta}{2},$$

de unde

$$x = 2e \operatorname{tg} r_1 = \frac{2e \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

$$e_{ap} = \frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2} = \frac{e \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)}}.$$

2.1.2. Introducînd în relația $w_{es} = \frac{W_e}{V_e}$, expresiile energiei electrostatice înmagazinate în condensatorul electric aflat la potențialul electric U

$$W_e = \int_0^U u \, dq = C \int_0^U u \, du = \frac{C U^2}{2}$$

și volumului condensatorului (considerat drept plan): $V_e = Ad$, rezultă expresia densității volumice a energiei electrostatice:

$$w_{es} = \frac{\frac{1}{2} C U^2}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon A}{d} U^2}{2Ad} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

E fiind intensitatea cîmpului electric (în spațiul condensatorului).

În mod asemănător, introducînd în relația $w_{mg} = \frac{W_b}{V_b}$, expresiile energiei de natură magnetică înmagazinată într-un solenoid parcurs de curentul electric I

$$W_b = \int_0^I |\mathcal{E}| \, i \, dt = \int_0^I i \, d\Phi = L \int_0^I i \, di = \frac{L I^2}{2}$$

și volumului solenoidului: $V_b = Al$, rezultă expresia densității volumice a energiei magnetice

$$w_{mg} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{Al} = \frac{\frac{\mu N^2 A}{l} I^2}{2Al} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{NI}{l}\right)^2 = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$$

H și B fiind respectiv intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică.

În cazul undelor electromagnetice staționare are loc o transformare alternativă (periodică) a energiei cîmpului electromagnetic din forma sa electrostatică în cea magnetică, și invers, astfel încît

$$\frac{\varepsilon E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu}, \text{ de unde } E_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} B_0 = v B_0$$

E_0 și B_0 fiind amplitudinile intensității cîmpului electric, respectiv inducției magnetice corespunzînd respectivei unde electromagnetice.

2.1.3. Întrucît în cazul undelor electromagnetice progresive oscilațiile cîmpurilor electric și magnetic au aceeași fază

$$w = w_{es} + w_{em} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} = \left(\frac{\varepsilon E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu}\right) \sin^2 (\omega t + \varphi) =$$

$$= \varepsilon E_0^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) = \frac{B_0^2}{\mu} \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

și de aici

$$\tilde{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)\,dt = \frac{\varepsilon E_0^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt =$$

$$\frac{\varepsilon E_0^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}\,dt = \frac{\varepsilon E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu}.$$

2.1.4. Energia electromagnetică ΔW care străbate în durata Δt elementul de arie ΔA așezat normal față de direcția undei electromagnetice are expresia

$$\Delta W = w \cdot \Delta A \cdot v \cdot \Delta t$$

deci, în conformitate cu relația (9) a breviarului : $S = \dfrac{\Delta W}{\Delta A \cdot \Delta t} = wv.$

În baza relațiilor deduse în precedentele probleme $S = \dfrac{B^2}{\mu} v =$

$= \dfrac{E^2}{\mu v} = \dfrac{E^2}{\zeta}$, unde $\zeta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ este impedanța mediului în care se propagă unda electromagnetică.

Întrucît : $H = \dfrac{B}{\mu} = \dfrac{E}{\mu v}$, avem și : $S = EH$, de unde, ținînd seamă că în cazul propagării în medii omogene și izotrope vectorii $\vec{E}$, $\vec{H}$ și $\vec{S}$ formează un triedru triortogonal drept : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

2.1.5. Deoarece durata de observație (de ordinul secundelor) este mult mai mare decît perioada oscilațiilor cîmpului electromagnetic, valoarea experimentală a densității fluxului energiei electromagnetice este o valoare mediată peste timp

$$\tilde{S} = \tilde{E}\tilde{H} = \frac{1}{T}\int_0^T E_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot H_0 \sin(\omega t + \varphi)\,dt =$$

$$= \frac{E_0 H_0}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{E_0 H_0}{2}.$$

În baza relațiilor deduse mai sus

$$\tilde{S} = \frac{E_0^2}{2\mu v} = \frac{E_0^2}{2\zeta} = \frac{\zeta}{2} H_0^2, \quad \text{deci} \quad E_0 = \sqrt{2\zeta\tilde{S}}, \text{ și } H_0 = \sqrt{\frac{2\tilde{S}}{\zeta}}.$$

Întrucît $\varepsilon_{aer} \approx \varepsilon_{vid}$, $\mu_{aer} \approx \mu_{vid}$, avem

$$\zeta_{aer} \approx \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\,\frac{F}{m}}} = 120\ \pi\ \Omega \approx 376{,}991\ \Omega.$$

Obținem în final

$$E_0 = \sqrt{2 \cdot 376{,}991\ \Omega\ 2 \cdot \frac{4{,}16\ J}{10^{-4}\ m^2 \cdot 60 s}} \approx 1022{,}36\,\frac{V}{m}, \text{ respectiv}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\zeta} \approx 2{,}712\,\frac{A}{m}.$$

2.1.6. Avem : $E_{0\parallel} = E_0 \cos\theta$, $E_{0\perp} = E_0 \sin\theta$, deci — în baza definiției gradului de polarizare în raport cu un plan Π [v. (13)]

$$P_\Pi(\theta) = \cos 2\theta.$$

Rezultă că gradul de polarizare corespunzînd unei unde liniar-polarizate are valori diferite, cuprinse în intervalul $[-1,1]$, după poziția planului în raport cu care este definit ; $P_\Pi = +1$ *dacă planul de referință* (Π) *coincide cu planul de oscilație al undei*, $P_\Pi = -1$ *dacă planul* Π *coincide cu planul de polarizare* (perpendicular pe planul de oscilație ; v. fig. 1), $P_\Pi = 0$ dacă (planul) Π este planul bisector al unghiului diedru format de planele de oscilație și polarizare. Rezultă că existența unei valori nule a gradului de polarizare, în raport cu un plan de referință anumit, nu este echivalentă cu absența unei polarizări a undei electromagnetice respective.

2.1.7. Valoarea unghiului diedru dintre două plane de oscilație consecutive fiind $\dfrac{\pi}{N}$, iar θ fiind unghiul diedru format de planul Π de referință cu un plan anumit de oscilație, unghiul format de planul Π cu cel de al „k" plan de oscilație va fi : $\theta + k\dfrac{\pi}{N}$; rezultă valorile componentelor paralelă și perpendiculară pe planul Π ale amplitudinii cîmpului electric $\vec{E}_{0k}$ (cu direcția cuprinsă în planul de oscilație de indice „k")

$$E_{0k\parallel} = E_0 \cos\left(\theta + k\frac{\pi}{N}\right), \quad E_{0k\perp} = E_0 \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{N}\right)$$

și de aici [cf. definiției (13)] valoarea gradului de polarizare

$$P_{\Pi}(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(2\theta + k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N\sin\frac{\pi}{N}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sin\left[2\theta + \frac{(2k+1)\pi}{N}\right] - \sin\left[2\theta + \frac{(2k-1)\pi}{N}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2N\sin\frac{\pi}{N}}\left\{\sin\left[2\theta + \frac{(2N-1)\pi}{N}\right] - \sin\left[2\theta - \frac{\pi}{N}\right]\right\} = 0.$$

Constatăm în acest caz că *există situații în care fasciculul electromagnetic prezintă o anumită polarizare, chiar dacă gradul de polarizare este nul în raport cu orice plan* Π (paralel cu direcția de propagare a fasciculului).

2.2.1. a) Emisia celor două surse luminoase fiind uniformă, intensitatea luminoasă [v. relația (16) a breviarului] nu depinde de direcția emisiei; rezultă valoarea fluxului luminos φ_Ω emis în unghiul solid Ω: $\varphi_\Omega = \Omega\,\mathscr{I}$, iar valoarea fluxului luminos total φ: $\varphi = 4\pi\,\mathscr{I}$.

Contribuțiile φ_1, φ_2 ale celor două surse la fluxul incident Φ pe placă vor fi: $\varphi_1 = \Omega_1\,\mathscr{I}$, $\varphi_2 = \Omega_2\,\mathscr{I}$, în care unghiurile solide Ω_1, Ω_2 sub care se vede din S_1, respectiv S_2, un diametru al plăcii pot fi calculate conform relațiilor

$$\Omega_1 = \frac{\sigma_1}{r_1^2}, \qquad \Omega_2 = \frac{\sigma_2}{r_2^2},$$

unde r_1 și r_2 sînt distanțele de la S_1, respectiv S_2, la circumferința plăcii, iar σ_1 și σ_2 sînt suprafețele laterale ale calotelor tăiate de placă în sferele cu centrele în S_1, respectiv S_2 și de raze r_1, respectiv r_2. Rezultă:

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 = \mathscr{I}(\Omega_1 + \Omega_2) = \frac{\varphi}{4\pi}\left(\frac{\sigma_1}{r_1^2} + \frac{\sigma_2}{r_2^2}\right) = \frac{\varphi}{4\pi}\left(\frac{2\pi h_1}{r_1} + \frac{2\pi h_2}{r_2}\right)$$

unde h_1, h_2 sînt înălțimile celor două calote: $h_1 = r_1\left(1 - \cos\frac{\alpha_1}{2}\right)$, $h_2 = r_2\left(1 - \cos\frac{\alpha_2}{2}\right)$ și în final

$$\frac{2\Phi}{\varphi} = 1 - \cos\frac{\alpha_1}{2} + 1 - \cos\frac{\alpha_2}{2}, \text{ de unde } \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{2(\varphi - \Phi)}{\varphi}.$$

b) După cum sursele se găsesc de aceeași parte a plăcii, sau de părți opuse, avem condițiile geometrice suplimentare $\frac{\alpha_2}{2} = \theta + \frac{\alpha_1}{2}$, respectiv $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \pi - \theta$, ceea ce, împreună cu relația dedusă la primul punct, ne dă

$$\alpha_1 = 2\arccos\left[\frac{(\Phi - \varphi)}{\varphi}\sec\frac{\theta}{2}\right] - \theta,$$

și $\alpha_2 = 2\arccos\left[\frac{(\Phi - \varphi)}{\varphi}\sec\frac{\theta}{2}\right] + \theta$ în primul caz, respectiv: $\alpha_1 = 2\arcsin\left[\frac{(\Phi - \varphi)}{\varphi}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\right] - \theta$ și $\alpha_2 = 2\pi - 2\theta - \alpha_1$ în cel de al doilea caz.

În baza relațiilor deduse, putem scrie (în primul caz) $\cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - \theta\right) + \cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{2(\varphi - \Phi)}{\varphi}$, de unde rezultă că valoarea lui α_1 corespunzînd minimului fluxului Φ este: $\alpha_1 = 0$ (soluție banală, corespunzînd valorii minime $\Phi = 0$).

În cazul surselor așezate de părți opuse ale plăcii, *valorile unghiurilor* α_1, α_2 pentru care Φ este minim sînt $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi - \theta$; în acest caz, obținem

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2(\varphi - \Phi_{\min})}{\varphi}, \text{ de unde:}$$

$$\Phi_{\min} = \varphi\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

c) Valoarea unghiului α_2 poate fi determinată din ecuația trigonometrică

$$2\cos^2\frac{\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_2}{2}+\frac{2\Phi-3\varphi}{\varphi}=0;$$

valoarea minimă a lui Φ : $\Phi_{\min}=0$ este obținută pentru $\alpha_1=\alpha_2=0$, valoarea maximă a fluxului luminos incident pe placă : $\Phi_{\max}=\varphi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ apare pentru $\alpha_1=\pi$ și $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$.

2.2.2. Întrucît în interiorul intervalului spectral ($\Delta\lambda=6$ Å) corespunzător dubletului D al sodiului, vizibilitatea este practic constantă, ținînd seamă și de relațiile (21), (19), (20), obținem

$$\Delta\Phi\approx K\Delta\Phi^{ef}=K\Phi_\lambda^{ef}\cdot\Delta\lambda=KV_\lambda\Phi_\lambda\cdot\Delta\lambda=KV_D\cdot\Delta P$$

unde ΔP este puterea utilă disipată pentru emisia liniei D a sodiului ; efectuînd calculele obținem

$$\Delta\Phi\approx 650\,\frac{\text{lm}}{\text{Wl}}\cdot 0{,}766\,\frac{\text{Wl}}{\text{W}}\cdot 0{,}2\text{W}\approx 99{,}58\,\text{lm}.$$

2.2.3. Întocmim un tabel conținînd valorile vizibilității relative, numărului de undă $\left(\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}\right)$ și ale rapoartelor variațiilor vizibilității la variațiile numărului de undă :

λ(Å)	V_λ	$\tilde{\nu}(\mu\text{m}^{-1})$	$\Delta V_\lambda/\Delta\tilde{\nu}$
5900	0,757	1,69492	
			4,455
6000	0,631	1,66667	
			4,68
6100	0,503	1,63934	
			4,605
6200	0,381	1,61290	
			4,533
6300	0,265	1,58730	

Se constată că valorile rapoartelor $\frac{\Delta V_\lambda}{\Delta\tilde{\nu}}$ sînt practic egale, deci este de așteptat ca o relație liniară pentru V_λ în funcție de $\tilde{\nu}$

să verifice bine valorile experimentale. Scriind ecuația dreptei trecînd prin punctele extreme de coordonate (V_λ, $\tilde{\nu}$), obținem

$$V_\lambda=4{,}568\,\tilde{\nu}-6{,}99$$

ceea ce conduce la bune evaluări ale valorilor experimentale ale vizibilităților relative în intervalul spectral [5900 Å, 6300 Å] :

λ(Å)	5900	6000	6100	6200	6300
V_λ evaluat prin relația liniară	0,757	0,6325	0,503	0,382	0,265
V_λ observat	0,757	0,631	0,503	0,381	0,265

2.2.4. În baza relațiilor (15), (19)—(21) și (24) ale breviarului, avem

$$\Delta\Phi^{ef}=\Delta A\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}V_\lambda R_\lambda\,\mathrm{d}\lambda \quad\text{și}\quad \Delta\Phi=K\cdot\Delta A\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}V_\lambda R_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

ΔA fiind mărimea elementului de arie emițător.

În cazul problemei de față, argumentul exponențialei din expresia (24′) are valoarea minimă

$$\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)_{\min}\approx\frac{6{,}626\cdot10^{-34}J\cdot s\cdot3\cdot10^{8}\text{m}\cdot s^{-1}}{1{,}38\cdot10^{-23}J\cdot K^{-1}\cdot6{,}3\cdot10^{-7}\text{m}\cdot2{,}044\cdot10^{3}\text{K}}\approx11{,}18$$

deci, pentru întreg intervalul spectral 5900 Å $\leqslant\lambda\leqslant$ 6300 Å, putem neglija unitatea pe lîngă exponențială și putem evalua densitatea spectrală a emitanței energetice a corpului negru [v. (24′)] prin relația

$$R_\lambda=C_1\tilde{\nu}^5\exp\left(-\frac{C_2\tilde{\nu}}{T}\right)$$

unde $C_1=2\pi hc^2$ și $C_2=\frac{hc}{k}$ sînt constantele universale ale radiației termice.

Înlocuind expresia R_λ de mai sus, precum și relația liniară $V_\lambda = f(\tilde{\nu})$ dedusă pentru intervalul spectral indicat în cadrul problemei precedente, obținem

$$\Delta\Phi^{ef} = \Delta A \int_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_2} (4{,}568\,\tilde{\nu} - 6{,}99)\cdot C_1 \tilde{\nu}^5 \exp\left(-\frac{C_2\tilde{\nu}}{T}\right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{\tilde{\nu}}\right)$$

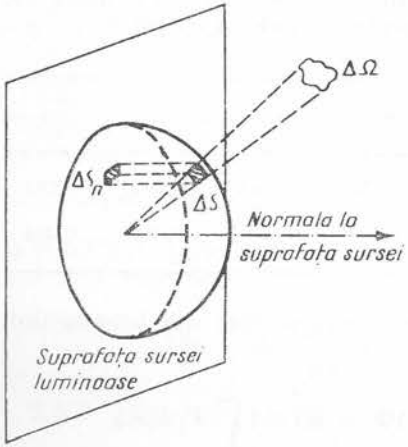


Fig. 2.2.4 R

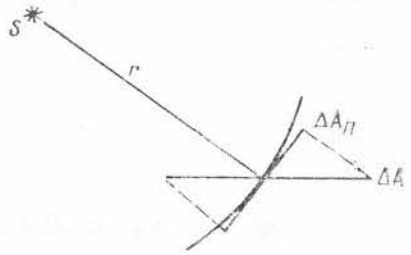


Fig. 2.2.5 R

și în final

$$\Delta\Phi^{ef} = \Delta A \int_{\tilde{\nu}_2}^{\tilde{\nu}_1} (4{,}568\,\tilde{\nu} - 6{,}99)\cdot C_1 \nu^3 \exp\left(-\frac{C_2\tilde{\nu}}{T}\right) \mathrm{d}\tilde{\nu}$$

$$\text{și } \Delta\Phi = K\cdot\Delta\Phi^{ef}.$$

Efectuînd calculele numerice se obține

$$\Delta\Phi^{ef} \approx 1{,}423206\cdot 10^{-3} \text{ Wl, respectiv } \Delta\Phi \approx 0{,}925084 \text{ lm.}$$

2.2.5. Din relația (18) a breviarului rezultă contribuția ($\Delta\mathscr{R}$) la emitanța luminoasă (a sursei) a radiațiilor emise în unghiul solid $\Delta\Omega$ centrat în jurul direcției formînd unghiul θ cu normala la suprafața emițătoare

$$\Delta\mathscr{R} = \frac{\Delta\Phi_{\Delta\Omega}}{\Delta A} = \mathscr{L}\cdot\Delta\Omega\ \cos\theta = \mathscr{L}\frac{\Delta\sigma\cos\theta}{r^2} = \mathscr{L}\frac{\Delta S_n}{r^2}$$

unde $\Delta\sigma$ este aria suprafeței ΔS decupată din suprafața sferei de rază r de conul de unghi solid $\Delta\Omega$, iar ΔS_n este aria proiecției suprafeței ΔS pe planul suprafeței sursei luminoase; deoarece emisia sursei este uniformă, luminanța $\mathscr{L}$ are aceeași valoare independent

de valoarea unghiului θ, obținînd prin sumarea peste toate unghiurile solide (de o parte a suprafeței emițătoare)

$$\mathscr{R} = \mathscr{L}\frac{\pi r^2}{r^2} = \pi\mathscr{L}.$$

2.2.6. În baza relațiilor (17) și (16) deducem

$$= \lim_{\Delta A_n\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \left[\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\Phi\cdot r^2}{\Delta A\cos i}\right]\frac{\cos i}{r^2} =$$

$$= \lim_{\Delta A_n\to 0}\left(\frac{\Delta\Phi\cdot r^2}{\Delta A_n}\right)\frac{\cos i}{r^2} = \frac{\mathscr{I}\cos i}{r^2}$$

unde r este distanța de la sursa luminoasă S la elementul ΔA (fig. 2.2.6 R), iar i este unghiul de incidență al fasciculului luminos pe elementul de arie considerat.

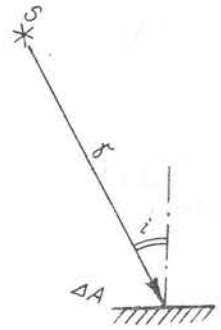


Fig. 2.2.6 R

2.2.7. $\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{I}}{r^2}\cos i = \dfrac{80\text{ cd}}{4\text{ m}^2}\cos 60^\circ = 10\text{ lx.}$

2.2.8. $\cos i = \dfrac{\mathscr{E} r^2}{\mathscr{I}} = \dfrac{2\text{ lx}\cdot 4\text{ m}^2}{200\text{ cd}} = 0{,}04$, deci $i \approx 87^\circ 40'$;

$h = r\cos i = 8$ cm.

2.2.9. $\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{I}}{r^2}\cos i = \dfrac{\mathscr{I}}{h^2+x^2}\dfrac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$, de unde

$$x = \sqrt{\left(\frac{h^2\cdot\mathscr{I}^2}{\mathscr{E}^2}\right)^{1/3} - h^2} = 8\text{ m.}$$

2.2.10. Înălțimea h_2 a becului electric deasupra mesei, după coborîrea sa, se află din condiția

$$\frac{\mathscr{I}}{h^2} = \frac{\mathscr{I}}{(h_2^2+r^2)}\cdot\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+r^2}}$$

ca soluție a ecuației algebrice $(h_2^2+r^2)^3 = h^4 h_2^2$; introducînd datele numerice ale enunțului se găsește

$$h_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{ m, deci } d = h - h_2 = \frac{8-3\sqrt{3}}{4}\text{ m} \approx 0{,}701\text{ m.}$$

2.2.11. Notînd prin h înălțimea lămpii deasupra mesei, iar prin d distanța de la piciorul perpendicularei dusă din lampă pe masă și locul cărții, avem

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{I}}{h^2 + d^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} = h\mathscr{I}(h^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}};$$

din condiția

$$\frac{d\mathscr{E}}{dh} = \mathscr{I} \cdot (d^2 - 2h^2)(h^2 + d^2)^{-5/2} = 0, \text{ obținem}$$

$$h(\max \mathscr{E}) = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \approx 0{,}707 \text{ m}.$$

2.2.12. Utilizînd relațiile deduse în cadrul problemei precedente, găsim

$$h(\max \mathscr{E}) = \frac{d}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ m} \approx 2{,}828 \text{ m și } \mathscr{E}_{\max} = \frac{h\mathscr{I}}{(h^2 + d^2)^{3/2}} =$$

$$= 5\sqrt{3} \text{ lx} \approx 8{,}6 \text{ lx}.$$

2.2.13. Alegînd drept origine a axei timpului momentul în care sursa luminoasă mobilă se află la cea mai mică distanță (practic nulă, cf. enunțului) de marginea paravanului, avem

h(distanța sursă-paravan) $= vt$ și [v. problema 2.2.9]

$$\mathscr{E} = \mathscr{I} \cdot h(h^2 + d^2)^{-3/2} = \mathscr{I} \cdot vt(v^2t^2 + d^2)^{-3/2},$$

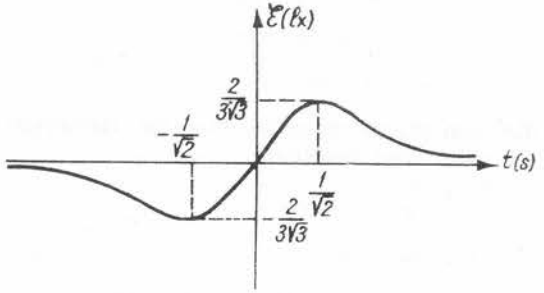


Fig. 2.2.13 R

unde valorile negative ale iluminării (obținute pentru $t < 0$) vor fi interpretate ca reprezentînd, în modul, iluminările feței opuse a paravanului (spre care se deplasa inițial sursa); conform enunțului,

avem: $\mathscr{E}(t) = \frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}$, funcție al cărei grafic este „serpentina Newton", reprezentată alăturat.

Se constată că valorile maxime ale iluminării (unei părți, sau a celeilalte a suprafeței elementare considerate a paravanului) sînt atinse la momentele: $t = \pm\frac{d}{\sqrt{2}\,v}$, deci în cazul de față pentru:

$t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ s $\pm$ 0,707 s, ceea ce corespunde unei distanțe sursă-paravan: $h = v \cdot t = \pm\frac{d}{\sqrt{2}} \pm 0{,}707$ m.

2.2.14. Adoptînd notațiile utilizate în cadrul problemelor precedente, avem: $d_1 = d_2$, deci

$$\mathscr{I}_2 = \frac{\mathscr{E}_2 r_2^2}{\cos i_2} = \frac{\mathscr{E}_1}{\cos i_2}\left(\frac{d_2}{\sin i_2}\right)^2 = \frac{\sin^2 i_1 \cdot \cos i_1}{\cos i_2 \cdot \sin i_2} \frac{\mathscr{E}_1}{\cos i_1}\left(\frac{d_1}{\sin i_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos i_1}{\cos i_2}\left(\frac{\sin i_1}{\sin i_2}\right)^2 \mathscr{I}_1$$

de unde, introducînd datele numerice ale enunțului: $\mathscr{I}_2 = 30 \cdot \sqrt{6}$ cd $\approx$ $\approx$ 73,484 cd.

2.2.15. Condiția de egalitate a iluminărilor determinate de fiecare din cele două becuri se scrie (utilizînd notațiile curente; $\mathscr{I}_1 \cdot h(h^2 + d_1^2)^{-2/2} = \mathscr{I}_2 \cdot h \cdot (h^2 + d_2^2)^{-3/2}$, de unde

$$\frac{MB_1}{MB_2} = \frac{\sqrt{h^2 + d_1^2}}{\sqrt{h^2 + d_2^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{I}_2}} = c \text{ (const.)};$$

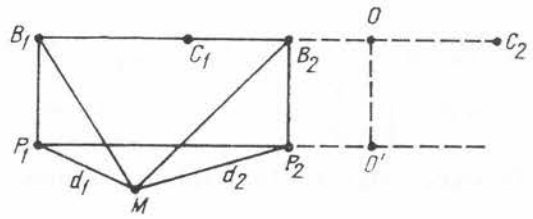


Fig. 2.2.15 R

rezultă că locul geometric al punctelor M egal iluminate de becurile B_1, B_2 este sfera de diametru C_1C_2 (C_1 și C_2 sînt punctele dreptei

$B_1 B_2$ care împart segmentul B_1B_2 în rapoartele: $\frac{B_1C_1}{C_1B_2} = \frac{B_1C_2}{B_2C_2} = c$).

Rezultă că locul geometric al punctelor din piață egal iluminate de becurile B_1, B_2 este cercul cu centrul în proiecția O' a mijlocului O al segmentului C_1C_2 pe planul pieței și de rază $r = \sqrt{\frac{1}{4}(C_1C_2)^2 - h^2}$; deoarece $C_1C_2 = \frac{2cD}{|c^2-1|}$, există puncte ale pieței egal iluminate de cele două becuri doar dacă: $\sqrt[3]{\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2}} - \sqrt[3]{\frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1}} \leqslant \frac{D}{h}$. Evident, în cazul particular $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, punctul C_2 se deplasează la infinit și locul geometric al punctelor pieței egal iluminate de cele două becuri se reduce la mediatoarea segmentului P_1P_2 (unind picioarele stîlpilor susținînd cele două becuri).

2.2.16. Considerînd că strălucirile surselor considerate sînt practic constante pe suprafețele acestora, relația (18) a breviarului ne dă (pentru $\theta = 0$): $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{I}}{A_s}$, și întrucît la incidență normală: $\mathcal{I} = \mathcal{E}d^2$, obținem în final

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{E} \cdot d^2}{A_s}.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$\mathcal{L}_S = 1{,}49 \cdot 10^9$ *nt*, $\mathcal{L}_L = 3{,}41 \cdot 10^3$ *nt*, $\mathcal{L}_{filam} = 1{,}27 \cdot 10^8$ *nt*.

2.2.17. Conform relațiilor (16) și (18) ale breviarului: $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{I}}{\Delta A}$, unde aria aparentă a globului este $\Delta A = \frac{\pi d^2}{4}$, d fiind diametrul globului; deducem $d = \sqrt{\frac{4\mathcal{I}}{\pi \mathcal{L}}} \approx 0{,}19993$ m $= 19{,}993$ cm.

2.2.18. a) În baza relației (16), fluxul luminos total Φ_t are expresia

$$\Phi_t = 4\pi\mathcal{I} = 4\pi \cdot 10^3 \text{ cd} \cdot \text{str} \approx 1{,}256 \cdot 10^4 \text{ lm}.$$

b) Cf. relației (15) emitanța sursei este

$$\mathcal{R} = \frac{\Phi_t}{A_s} = \frac{4\pi\mathcal{I}}{\pi d^2} = \frac{4\mathcal{I}}{d^2} = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ cd} \cdot \text{str}}{4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 10^5 \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}.$$

Luminanța sursei poate fi exprimată, în baza relației (18), în funcție de intensitatea luminoasă a sursei și aria aparentă (aria maximă a unei secțiuni transversale pe direcția de observație):

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{I}}{A_{ap}} = \frac{4\mathcal{I}}{\pi d^2} = \frac{\mathcal{R}}{\pi} = \frac{10^5}{\pi} \text{ nt} \approx 3{,}18 \cdot 10^4 \text{ nt}.$$

c) În baza relației (17) avem

$$\mathcal{E} = \frac{0{,}1\,\Phi_t}{A} = \frac{0{,}1 \cdot 1{,}256 \cdot 10^4 \text{ lm}}{0{,}25 \text{ m}^2} = 5{,}024 \cdot 10^3 \text{ lx}.$$

Deoarece fluxul luminos reflectat $\Phi_r = R\Phi_{inc} = R \cdot 0{,}1\,\Phi_t$, rezultă

$$\mathcal{R} = \frac{\Phi_r}{A} = \frac{0{,}1\,R\,\Phi_t}{A} = 4{,}0192 \cdot 10^3 \text{ lm} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Luminanța ecranului $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{R}}{\pi}$ va avea valoarea

$$\mathcal{L} = \frac{4{,}0192}{\pi} \cdot 10^3 \text{ nt} \approx 1{,}32 \cdot 10^3 \text{ nt} \cdot$$

2.3.1. Intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electric rezultat prin suprapunerea, într-un punct din spațiu, a undelor caracterizate de intensitățile $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ale cîmpurilor electrice corespunzătoare este

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

iar densitatea volumică w a energiei electromagnetice în zona respectivă va fi (cf. relației (6) a breviarului)

$$w = \varepsilon E^2 = \varepsilon (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = \varepsilon (\vec{E}_{01} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \vec{E}_{02} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2))^2$$

$\vec{E}_{01}$ și $\vec{E}_{02}$ fiind amplitudinile celor două intensități ale cîmpurilor electrice în punctul considerat.

Pentru unde electromagnetice de frecvențe nu prea depărtate de cele ale domeniului vizibil al spectrului: $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx$

$\approx 3.10^{15}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, mărimea observabilă experimental pe durata de observație $\tau \gg T_1$, T_2 este valoarea medie $\widetilde{w}$

$$\widetilde{w} = \frac{1}{\tau}\cdot\int_0^\tau w(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varepsilon E_1^2\cdot dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varepsilon E_2^2\cdot dt +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\tau}\int_0^\tau \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)\cdot\sin(\omega_2 t + \varphi_2)dt$$

de unde:

$$\widetilde{w} - \widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2 = \frac{\varepsilon}{\tau}\left\{\int_0^\tau \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\cos\,[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2]dt - \right.$$

$$\left. -\int_0^\tau \vec{E}_{01}\,\vec{E}_{02}\,\cos\,[(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)]\,dt\right\}.$$

Întrucît $\dfrac{\int_0^\tau \cos\,[(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)]\,dt}{\tau} \sim \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega\cdot\tau} \ll 1$,

iar $\widetilde{w}_1 = \dfrac{\varepsilon\cdot E_{01}^2}{\tau}\int_0^\tau \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1)dt = \frac{\varepsilon E_{01}^2}{2}$, $\widetilde{w}_2 = \frac{\varepsilon E_{02}^2}{2}$,

$$2\sqrt{\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2} = \varepsilon E_{01}E_{02},$$

rezultă $\gamma = \dfrac{\widetilde{w}_{\max} - w_1 - \widetilde{w}_2}{2\sqrt{\widetilde{w}_1\widetilde{w}_2}} = \text{MAX}\left\{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \vec{1}_{E1}\cdot\vec{1}_{E2}\cos\,[(\omega_1 - \right.$

$$\left. - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]dt\right\},$$

unde $\vec{1}_{E1}$ și $\vec{1}_{E2}$ sînt vectorii unitari ai direcțiilor intensităților cîmpurilor electrice $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ în punctul considerat.

Pentru ca γ să fie apropiat de unitate este necesar ca argumentul $(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2$ să nu varieze prea mult în durata de observație, mai precis ca $(\omega_1 - \omega_2)\tau < \pi$, de unde $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} < \frac{\pi}{\omega\cdot\tau} = \frac{T}{2\tau} \sim 10^{-15}$, unde $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T}$ (timpul de observație τ fiind uzual de ordinul secundei); rezultă că este practic necesar ca *frecvențele celor două unde să coincidă.*

Din aceeași cerință, ca integrandul din expresia gradului de coerență să fie practic constant în durata de observație, rezultă

— necesitatea ca $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$ [pentru $t \in (t_i,\ t_i + \tau)$],

— necesitatea ca $\vec{1}_{E1}\cdot\vec{1}_{E2} = \text{const.} \neq 0$ (în același interval de timp).

În cazul cînd undele care se suprapun prezintă o structură (spectrală și de polarizare) complexă, pentru a avea un înalt grad de coerență al celor două unde este necesar ca acestea să aibă un număr considerabil de componente monocromatice, liniar-polarizate, satisfăcînd condițiilor deduse.

2.3.2. Pentru ca oscilațiile cîmpurilor electric și magnetic ale celor două unde să fie simultan nenule (să existe și o suprapunere în timp a oscilațiilor), este necesar ca diferența între duratele de străbatere a drumurilor (de la sursă la zona interferenței) să nu depășească durata unui act de emisie $|t_1 - t_2| < t_{\text{em}}$.

Întrucît $t_1 = \frac{d_1}{v} = \frac{\delta_1}{c}$, $t_2 = \frac{d_2}{v} = \frac{\delta_2}{c}$, condiția precedentă poate fi scrisă și în următoarele moduri

$$|d_1 - d_2| < v\,t_{\text{em}},\quad |\delta_1 - \delta_2| < ct_{\text{em}};$$

produsul vt_{em} care reprezintă distanța dintre cele mai depărtate puncte (în lungul unei direcții de propagare) atinse, la un anumit moment, de oscilațiile electromagnetice emise în durata unui act de emisie, este numit „lungimea unui tren de undă".

Deoarece distanța între două trenuri de undă $vt_p \approx 3\cdot 10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 10^{-4}\,\text{s} \sim$ $\sim$ 30 km, este mult mai mare decît distanțele uzuale (de ordinul metrului) din instalațiile optice obișnuite, rezultă că singura posibilitate de a asigura suprapunerea în timp a oscilațiilor electromagnetice din undele obținute prin dedublare, rămîne: $|d_1 - d_2| < vt_{\text{em}} \sim 3$ m (sau $|\delta_1 - \delta_2| < ct_{\text{em}}$).

2.3.3. Conform celor constatate în cadrul problemei 2.3.1, pentru $\omega_1 = \omega_2$ avem

$$\widetilde{w} = \widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2 + 2\sqrt{\widetilde{w}_1\ \widetilde{w}_2}\ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\vec{1}_{E1}\cdot\vec{1}_{E2})\cdot\cos\,(\varphi_1 - \varphi_2)\ dt,$$

de unde rezultă că — pentru o valoare constantă a unghiului format de planele de oscilație ale celor două unde, *valoarea maximă a* $\widetilde{w}$ *apare în cazul cînd* $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2m\pi$, respectiv, *valoarea minimă pentru* $\Delta\varphi = (2m + 1)\,\pi$ (m=întreg).

În cazul aplicării metodei dedublării sursei

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega(t - t_1) - \omega(t - t_2) = \omega(t_2 - t_1) = \frac{\omega}{v}(d_2 - d_1) =$$

$$= \frac{\omega}{c}(\delta_2 - \delta_1),$$

unde t_1 și t_2 sînt duratele de străbatere a drumurilor celor două unde, de la sursă la zona interferenței.

Rezultă că se obțin valori maxime ale $\widetilde{w}$ (în particular, în cazul undelor din domeniul vizibil al spectrului, ale iluminării unui ecran) dacă $\Delta d = d_2 - d_1 = \frac{v}{\omega}\Delta\varphi = m\lambda$ sau : $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{c}{\omega}\Delta\varphi = m\lambda_0$, respectiv valori minime ale $\widetilde{w}$, dacă $\Delta d = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, respectiv $\Delta\delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$ (m-întreg).

2.3.4. Raportul $\frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-4}\text{m}}{6 \cdot 10^{-7}\text{m}} = 500$ este un număr întreg, deci, conform rezultatului problemei precedente, rezultă că va fi observată o franjă luminoasă.

2.3.5. Notînd prin x distanța de la punctul M (din planul ecranului de observație) în care se produce interferența, la planul perpendicular pe direcția fantelor F_1, F_2, trecînd prin axa de simetrie a interferometrului (fig. 5), avem

$$F_1M = d_1 = \sqrt{D^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} \quad \text{și} \quad F_2M = d_2 = \sqrt{D^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2}.$$

Întrucît distanțele l și x sînt mult mai mici ca D, se poate utiliza aproximația $\sqrt{1 + y} \approx 1 + \frac{y}{2}$, valabilă pentru $y \ll 1$.

Rezultă :

$$\Delta d = D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(\frac{l}{2} + x\right)^2} - D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2} \approx$$

$$\approx D\left[1 + \frac{1}{2D^2}\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 - 1 - \frac{1}{2D^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\right] = \frac{lx}{D}.$$

În baza relațiilor deduse în problema precedentă, rezultă pozițiile franjelor întunecată și luminoasă de ordinul k

$$x_{\text{int. }k} = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{l}, \quad \text{respectiv} : \quad x_{\text{lum. }k} = \frac{kD\lambda}{l}$$

și valoarea interfranjei

$$i = x_{\text{int.}k+1} - x_{\text{int.}k} = x_{\text{lum. }k+1} - x_{\text{lum.}k} = \frac{\lambda D}{l}.$$

2.3.6. a) Razele R_1, R_2 care interferă într-un punct M al ecranului (fig. 2.3.6 R) par a proveni din cele două surse virtuale S', S'' — imagini ale sursei S în oglinda O_1, respectiv în O_2. Distanța l dintre sursele virtuale S' și S'' este : $l = 2\rho \sin\alpha \approx 2\rho\alpha$ (deoarece unghiul $\widehat{S'OS''} = 2\alpha$ este mult mai mic decît 1 radian), iar distanța D de la segmentul $S'S''$ la ecranul de observație are valoarea : $D = d + \rho\cos\alpha \approx d + \rho$.

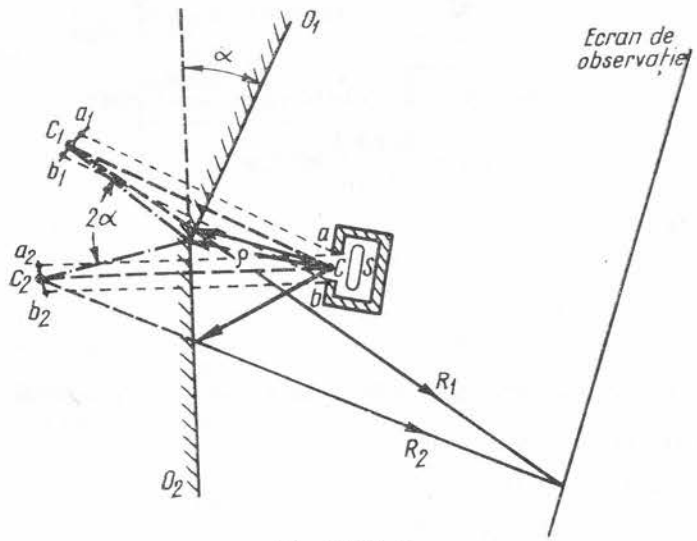


Fig. 2.3.6 R

Rezultă valoarea interfranjei

$$i \approx \frac{\lambda(d + \rho)}{2\rho\alpha} = \frac{6{,}563 \cdot 10^{-7}\text{ m} \cdot 1\text{ m}}{2 \cdot 10^{-1}\text{ m} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2} \approx 5{,}64 \cdot 10^{-3}\text{ m} = 5{,}64\text{ mm}.$$

b) Întrucît diferitele puncte ale deschiderii fantei sursei luminoase produc sisteme de franje de interferenţă deplasate prin translaţie cu o distanţă egală cu cea dintre punctele respective ale fantei, pentru a evita apariţia unei iluminări uniforme (cu imposibilitatea observării nete a franjelor de interferenţă) a ecranului este necesar ca lăţimea fantei — egală cu distanţa maximă dintre franjele de diferenţă de acelaşi ordin — să reprezinte o fracţiune suficient de mică a interfranjei, spre exemplu ca $\Delta l \leqslant \frac{i}{2}$. În cazul datelor numerice ale problemei de faţă, găsim: $\Delta l_{max} \approx 2{,}82$ mm.

c) Conform condiţiei introduse mai sus

$$d_m = \frac{m\left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)(\rho + d)}{2\rho\alpha} - \frac{m\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)(\rho + d)}{2\rho\alpha} =$$

$$= \frac{m\Delta\lambda(\rho + d)}{2\rho\alpha} \leqslant \frac{i}{2} = \frac{\lambda(\rho + d)}{2\rho\alpha}, \text{ de unde } m_{max} \approx \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Introducînd datele enunţului, obţinem în acest caz:

$$m_{max} \approx \frac{6563\ \text{Å}}{2 \cdot 10} \approx 328\ \text{Å}.$$

2.3.7. Pe ecranul de observaţie se suprapun sisteme de franje de interferenţă datorate perechilor de surse coerente a şi a', ..., S şi S', ..., b şi b' (fig. 2.3.7); pentru a putea observa N franje este necesar ca distanţa între franja de ordinul N corespunzînd celor mai apropiate surse coerente (b şi b') şi franja de acelaşi ordin corespunzînd celor mai depărtate surse coerente (a şi a') să nu depăşească $\frac{1}{2}$ din valoarea medie a interfranjei:

$$\frac{ND\lambda}{2h - s} - \frac{ND\lambda}{2h + s} \leqslant \frac{i}{2} = \frac{D\lambda}{4h}. \text{ La limită, obţinem}$$

$$\frac{N}{2h - s_{max}} - \frac{N}{2h + s_{max}} = \frac{1}{4h}, \text{ de unde: } s_{max} = 2h\left[\sqrt{4N^2 + 1} - 2N\right].$$

Introducînd valorile din enunţ, găsim

$$s_{max} = 10^{-1}\,\text{m} \cdot \left[\sqrt{6401} - 80\right] \approx 6{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}675\ \text{mm}.$$

2.3.8. a) Distanţa p' la care se găsesc situate, faţă de bilentilă, imaginile D' şi D'' ale deschiderii D (fig. 2.3.8 R) în raport cu cele două părţi ale bilentilei, poate fi determinată în baza formulei lentilelor subţiri: $p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{1\,\text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m}}{1\,\text{m} \cdot 0{,}5\,\text{m}} = 1\ \text{m}$. Distanţa dintre sursele virtuale coerente D' şi D'' rezultă în baza unor proprietăţi de asemănare geometrică

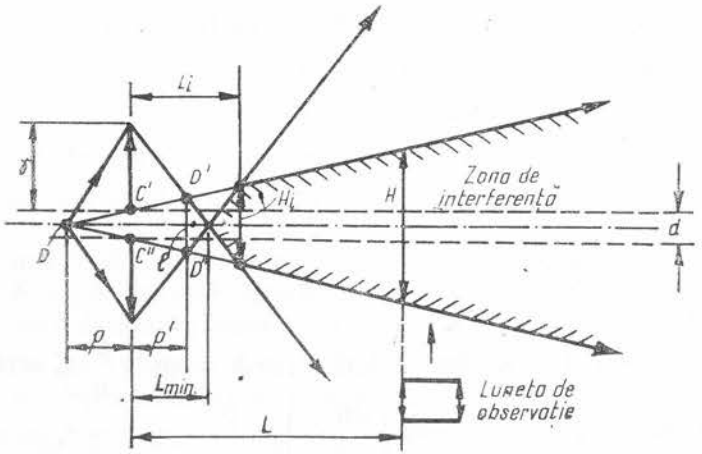


Fig. 2.3.8 R

$$l = D'D'' = d\frac{p + p'}{p} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}.$$

Distanţa L_{min} începînd de la care fasciculele de raze emergente de la cele două părţi ale bilentilei se suprapun în parte, apărînd astfel o zonă de interferenţă, poate fi determinată de asemenea în baza unor proprietăţi de asemănare geometrică: $\frac{2r + d}{L_{min}} = \frac{l}{L_{min} - p'}$, de unde $L_{min} = \frac{p'(2r + d)}{2r + d - l} = \frac{1\,\text{m} \cdot 1{,}1\,\text{cm}}{0{,}9\ \text{cm}} \approx 1{,}22\ \text{m}$.

b) Din egalităţile de asemănare (v. fig. 2.3·8 R) $\frac{H_i}{L_i - L_{min}} = \frac{2r + d}{L_{min}}$ şi $\frac{H_i}{L_i + p} = \frac{d}{p}$, deducem $\frac{L_i + p}{L_i - L_{min}} = \frac{p(2r + d)}{L_{min}\,d}$, de unde — în cazul datelor problemei de faţă — rezultă: $L_i = 1{,}5$ m.

c) Lărgimea H a zonei de interferenţă la distanţa de 3,4 m de bilentilă (distanţă la care se găseşte luneta de observaţie) poate fi de asemenea determinată prin asemănare geometrică

$$H = \frac{d}{p}(L + p) = \frac{10^{-3}\,\text{m}}{1\,\text{m}}(3{,}4\,\text{m} + 1\,\text{m}) = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 4{,}4\,\text{mm};$$

ţinînd seamă că la distanţa L de bilentilă, interfranja are valoarea

$$i = \frac{(L - p')\,\lambda}{l} = \frac{(3{,}4\,\text{m} - 1\,\text{m}) \cdot 5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 6 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0{,}6\,\text{mm},$$

rezultă că de o parte şi de alta a axei de simetrie a dispozitivului avem cîte $\frac{H}{2} \cdot \frac{1}{i} = \frac{2{,}2\,\text{mm}}{0{,}6\,\text{mm}} \approx 3{,}67$ interfranje situate în zona de interferenţă, deci în total — cu ajutorul lunetei plasate la 3,4 m de bilentilă — vor putea fi observate 7 franje luminoase şi 8 franje întunecate.

2.3.9. Întrucît (v. fig. 2.3.9) $i_1 = \beta = \operatorname{arctg}\frac{y}{q} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{a}{q} \ll$ $\ll 1$ radian, rezultă $r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) \approx \frac{\beta}{n}$, $r_2 = \alpha - r_1 \approx \alpha - \frac{\beta}{n}$, $i_2 = \arcsin(n \sin r_2) \approx n\,\alpha - \beta$, precum şi valoarea unghiului format de raza emergentă de la partea de sus a biprismei cu planul de simetrie al acesteia: $\varepsilon = \alpha - i_2 \approx \beta - (n - 1)\,\alpha$.

Coordonatele punctului E de emergenţă (în care raza considerată atinge faţa de ieşire a biprismei) pot fi găsite rezolvînd sistemul format de ecuaţia: $Y - q\,\beta \approx Y - y = \operatorname{tg} r_1 \cdot X \approx \frac{\beta}{n} X$ (satisfăcută de punctele situate în lungul traiectoriei rectilinii din biprismă a razei considerate) şi de ecuaţia tăieturii feţei de ieşire a biprismei cu planul secţiunii

$$Y - a = -\operatorname{cotg}\alpha \cdot X \approx -\frac{1}{\alpha} X;$$

obţinem $X_E \approx \frac{\alpha n\,(a - q\,\beta)}{n + \alpha\beta}$, $Y_E \approx \frac{\beta\,(a\alpha + nq)}{n + \alpha\,\beta}$, sau — întrucît $n \gg \alpha\beta$, iar $nq \gg a\alpha$ — găsim în definitiv

$$X_E \approx \alpha\,(a - q\beta), \text{ respectiv: } Y_E \approx q\beta.$$

Întrucît $X_E \approx \alpha(a - q\,\beta)$ generează (pentru $X \gg X_E$) în ecuaţia razei emergente din E (situat în partea de sus a biprismei)

$$Y - q \approx [\beta - (n - 1)\,\alpha] \cdot [X - \alpha\,(a - q \cdot \beta)],$$

termeni de mărime neglijabilă faţă de valorile celorlalţi termeni, putem omite $X_E \approx \alpha\,(a - q\beta)$ în ultima paranteză a expresiei de mai sus şi ecuaţia razelor emergente din partea de sus a biprismei devine:

$$Y - q\,\alpha\,(n - 1) \approx [\beta - (n - 1)\,\alpha]\;(X + q);$$

se constată că razele emergente din partea de sus a biprismei formează un fascicul avînd un punct comun S_1 $(-q, q \cdot \alpha\,(n - 1))$, intersecţie a prelungirilor razelor emergente. În mod similar, prelungirile razelor emergente de la jumătatea de jos a biprismei se intersectează în punctul comun S_2 avînd coordonatele: $X_{S_2} = -q$, $Y_{S_2} = -q\alpha\,(n - 1)$.

Întrucît fasciculele formate de razele emergente din cele două părţi ale biprismei par a proveni din S_1, respectiv S_2, cele două puncte sînt denumite surse virtuale (fictive).

2.3.10. a) În baza rezultatelor: $l = S_1S_2 \approx 2\,q\alpha\,(n - 1)$, $D \approx$ $\approx q + d$, obţinute în problema precedentă şi a faptului că, în cazul de faţă, avem $q = b - p - p' = b - p - \frac{pf}{p - f} = b - \frac{p^2}{p - f}$, expresia $i = \frac{\lambda D}{l}$ a interfranjei devine

$$i \approx \frac{\lambda\,(q + d)}{2q\alpha\,(n - 1)} = \frac{\lambda\,[(b + d)\,(p - f) - p^2]}{2\,[b\,(p - f) - p^2]\,\alpha\,(n - 1)}.$$

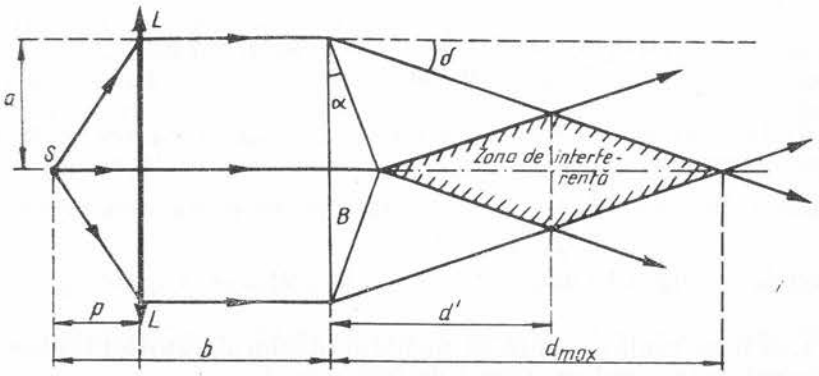


Fig. 2.3.10 R

Pentru ca valoarea interfranjei să nu depindă de distanța d (dacă aceasta este de ordinul metrilor) trebuie ca $p-f \ll \frac{p^2}{b+d} \leqslant \frac{10^{-2}\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{m}} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$, deci $f \approx p = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

b) Pentru $p - f \ll \frac{p^2}{b+d} < \frac{p^2}{b}$, expresia interfranjei devine $i \approx \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}$, de unde $\alpha \approx \frac{\lambda}{2i(n-1)}$.

Efectuînd calculele, găsim

$$\alpha \approx \frac{7\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}}{2\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot0{,}5} = 7\cdot10^{-4}\ \text{radiani}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot 3\,600\,\frac{''}{\text{radian}} \approx 2'24''.$$

c) În cazul problemei de față, trecerea razelor luminoase prin prisma de unghiu refringent $\alpha \ll 1$ radian se face într-o direcție apropiată de cea corespunzînd deviației minime; rezultă că unghiul δ de deviație va fi (în acest caz)

$$\delta \approx \delta_{min} = 2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha \approx (n-1)\alpha \ll 1\ \text{radian};$$

din fig. 2.3.10 R rezultă că

$$2a = 2d_{max}\,\mathrm{tg}\,\delta \approx 2d_{max}\,\delta \approx 2d_{max}(n-1)\alpha = d_{max}\frac{\lambda}{i}.$$

Efectuînd calculele, găsim

$$2a = 10\ \mathrm{m}\cdot\frac{7\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}}{10^{-3}\,\mathrm{m}} = 7\cdot10^{-3} = 7\,\mathrm{m}.$$

d) Întrucît zona de interferență (v. fig. 2.3.10 R) are — în secțiune — forma unui romb, lărgimea sa maximă (egală cu a) corespunde valorii $d' = \frac{1}{2}d_{max} = 5$ m. De o parte și de alta a axei de simetrie a dispozitivului vor exista (la distanța d') cîte $\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{i} = 1{,}75$ interfranje; rezultă că numărul maxim al franjelor întunecate observabile în cazul problemei de față este $N = 4$.

2.3.11. a) Avem: $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - i$, $i' = i$ (i' — unghiul de reflexie, i — unghiul de incidență pe lama separatoare); întrucît în cazul lamei cu fețe plane și paralele, razele emergentă și incidentă sînt paralele, avem condiția $i + i' = \frac{\pi}{2}$, de unde $i = \frac{\pi}{4}$ și $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ radiani.

b) Distanțele străbătute de cele două fascicule prin lama separatoare, respectiv prin cea compensatoare, sînt egale: au aceeași valoare d sec r, unde d este grosimea fiecărei lame, iar r este unghiul de refracție în lamă; distanțele străbătute în aer sînt: $d_1' = d_1 - d\cos(i-r)$, $d_2' = d_2 - d\cos(i-r)$, deci $\Delta d = 2(d_1' - d_2') = 2(d_1 - d_2)$, ordinul de interferență avînd astfel expresia $m = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2(d_1-d_2)}{\lambda}$ și valoarea $m = \frac{2\cdot10^{-2}\,\mathrm{m}}{5\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}} = 4\cdot10^4$.

2.3.12. a) Moleculele AgBr fiind polare, descompunerea lor prin iluminare, cu depunerea de Ag metalic și înnegrirea emulsiei, se produce — în concordanță cu toate cunoștințele actuale — ca urmare a acțiunii componentei electrice a cîmpului electromagnetic; zonele de impresionare maximă, respectiv minimă, a emulsiei vor corespunde astfel unor valori maxime, respectiv minime, ale mediei în timp a intensității cîmpului electric din zona respectivă. Apariția — la distanțe egale, în mediul M, în vecinătatea suportului — a unor asemenea valori maxime și minime ale mediei în timp a intensității cîmpului electric poate fi explicată prin interferența (cu formare de unde staționare) undei incidente pe suport, cu unda reflectată de acesta. În fine, apariția unei linii de înnegrire maximă, respectiv minimă, de-a lungul liniei de sprijin a plăcii fotografice pe suport, după cum indicele de refracție al mediului M este mai mare, respectiv mai mic, decît al suportului, poate fi explicată prin apariția unui defazaj la reflexie egal cu 0 în primul caz, respectiv cu π radiani în cel de al doilea caz.

b) Diferența Δd a distanțelor de la două zone succesive de impresionare maximă a emulsiei, pînă la suport, este dată de relația: $\Delta d = \Delta l \sin\alpha$, avînd în cazul de față valoarea: $\Delta d = 20\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}\sin1^\circ = 2\cdot10^{-5}\,\mathrm{m}\cdot0{,}01745 = 3{,}49\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Se constată că această distanță este exact egală cu valoarea $\frac{\lambda}{2}$, corespunzătoare distanței dintre nodurile succesive, sau ventrele succesive ale undelor staționare.

2.3.13. a) Unghiul format cu axa optică a lentilei de razele care formează cele mai depărtate maxime principale de interferenţă (fig. 2.3.13) este $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{d_{max}}{2f} = \operatorname{arctg} 0{,}1107 \approx 6°19'$.

Rezultă valoarea unghiului corespunzător i de emergenţă din lamă $i = 90° - \varphi \approx 83°41'$.

Diferenţa $\Delta\delta$ a drumurilor optice corespunzînd unor fascicule succesive emergente de aceeaşi parte a lamei este $\Delta\delta = \Delta\delta_p + \Delta\delta_r$, unde — datorită faptului că fasciculul care parcurge o dată în plus lama suferă în plus două reflexii — diferenţa de drum optic $\Delta\delta_r$ datorată reflexiilor este nulă, iar diferenţa de drum optic $\Delta\delta_p$ prin parcurs diferit este

$$\Delta\delta_p = n\,(AB + BC) - n_a\,AD = \frac{2nd}{\cos r} - n_a \cdot 2d \operatorname{tg} r \sin i =$$

$$= \frac{2nd}{\cos r}\left(1 - \frac{n_a \sin i}{n} \sin r\right) = 2nd \cos r.$$

Notînd prin m numărul (în general, neîntreg) egal cu raportul $\frac{\Delta\delta}{\lambda_0} = \frac{2nd\cos\alpha}{\lambda_0}$ şi ţinînd seamă că valoarea minimă a unghiului r pentru fasciculul luminos incident asupra lamei este egală cu α, rezultă că ordinul de interferenţă corespunzînd celor mai depărtate (în planul ecranului de observaţie) maxime de interferenţă este egal cu $[m]$ (cel mai mare număr întreg $\leqslant m$), iar unghiul r corespunzător razelor care formează aceste maxime este dat de condiţia : $2nd \cos r = [m]\,\lambda_0$; rezultă că — pentru aceste raze — avem

$$\cos\alpha - \cos r = \frac{\lambda_0\,(m - [m])}{2nd} \leqslant \frac{7 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \leqslant 10^{-5}$$

deci

$$r - \alpha \approx \frac{\cos\alpha - \cos r}{\sin\alpha} \sim 10^{-5}\ \text{radiani} = 10^{-5} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 3600'' \approx 2'',$$

$$r \approx \alpha = 41°30'.$$

Valoarea indicelui de refracţie al lamei va fi deci :

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \approx \frac{\sin i}{\sin\alpha} = \frac{\sin 83°41'}{\sin 41°30'} \approx \frac{0{,}99393}{0{,}66262} = 1{,}5$$

cu o eroare relativă negativă (de evaluare) de ordinul 10^{-5}.

b) Distanţa dintre punctele de emergenţă de la o anumită faţă a lamei a fasciculelor succesive fiind $D = 2d \operatorname{tg} r$, numărul N al fasciculelor emergente de fiecare parte a lamei va fi $N = 1 + \left[\frac{L}{D}\right] = 1 + \left[\frac{L}{2d \operatorname{tg} r}\right]$, de unde, efectuînd calculele

$$N = 1 + \left[\frac{0{,}5\ \text{m}}{6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \operatorname{tg} 41°30'}\right] = 10.$$

c) $m = \frac{2nd\cos r}{\lambda_0} \approx \frac{2nd\cos\alpha}{\lambda_0} \approx \frac{3.3.10^{-2}\text{m} \cdot 0{,}74896}{7.10^{-7}\ \text{m}} \approx 9{,}63 \cdot 10^4$.

d) Distanţa Δd dintre punctele de incidenţă pe lentilă a fasciculelor consecutive emergente de la lamă este :

$$\Delta d = 2d \operatorname{tg} r \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - i\right) \approx 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot \operatorname{tg} 41°30' \cdot \operatorname{tg} 6°19' \approx 5{,}85 \cdot 10^4\ \text{m}.$$

Rezultă că unghiurile formate de fasciculele succesive incidente într-un punct al planului focal vor fi de ordinul $\frac{5{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{1\ \text{m}} \sim 10^{-2}$ radian, deci relativ mici. Notînd prin $\vec{E}_k(t)$ valoarea la momentul t a intensităţii cîmpului electric al fasciculului k incident într-un punct al planului focal ($k = 1, 2, \ldots, N$), putem considera — din motivele de mai sus — că direcţiile cîmpurilor electrice în diferitele fascicule sînt practic aceleaşi, scriind intensitatea rezultantă a cîmpurilor electrice în punctul respectiv al ecranului de observaţie în forma : $\vec{E}_{\text{rez.}}(t) = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k(t) = \left[\sum_{k=1}^{N} E_k(t)\right] \cdot \vec{1}_E$, unde $\vec{1}_E$ este vectorul unitar al direcţiei comune a intensităţilor cîmpurilor electrice. Deoarece valorile unghiurilor de emergenţă din lamă sînt mai mari de 83°41', deci unghiurile r sînt apropiate de valoarea unghiului limită (corespunzînd reflexiei totale), rezultă că valoarea coeficientului de reflexie în lamă trebuie să fie apropiată de unitate ; întrucît şi atenuările în lamă, lentilă şi aer sînt neglijabile, rezultă că amplitudinile intensităţilor cîmpurilor electrice corespunzînd diferitelor fascicule incidente într-un punct al ecranului de observaţie vor fi practic egale, putînd scrie

$$E_1(t) = E_0 \cos\omega t, \quad E_2(t) = E_0 \cos(\omega t - \Delta\varphi), \ldots$$

$$E_k(t) = E_0 \cos[\omega t - (k-1)\,\Delta\varphi], \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Obținem

$$\vec{E}_{\text{rez.}} = E_0 \vec{1}_E \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t - n \cdot \Delta\varphi) =$$

$$= \frac{E_0 \cdot \vec{1}_E}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sin\left(\omega t - \frac{2n-1}{2} \cdot \Delta\varphi\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2n+1}{2} \cdot \Delta\varphi\right) \right],$$

și în final :

$$\vec{E}_{\text{rez.}}(t) = \frac{E_0 \vec{1}_E}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \left[\sin\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2N-1}{2} \cdot \Delta\varphi\right) \right] =$$

$$= \frac{\vec{E}_0 \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{N-1}{2} \Delta\varphi\right)}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}.$$

În baza relațiilor (9), (10) și (17) ale breviarului și a relației deduse mai sus, rezultă media în timp a iluminării energetice rezultante

$$\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}} = \tilde{\vec{S}}_{\text{rez.}} \vec{1}_A = \frac{\tilde{E}^2_{\text{rez.}}}{\zeta} \vec{1}_v \cdot \vec{1}_A = \tilde{\mathscr{E}}_1 \left[\frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^2$$

unde $\vec{1}_A$ este vectorul unitar al normalei la suprafața ecranului de observație, iar $\tilde{\mathscr{E}}_1$ reprezintă valoarea medie în timp a iluminării energetice determinate pe ecran de incidența unui singur fascicul emergent de la lamă.

Întrucît : $0 \leqslant \frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x} \leqslant N^2$, media în timp a iluminării rezultante va fi maximă : $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.max.princ.}m} = N^2 \cdot \tilde{\mathscr{E}}_1$, dacă $\frac{\Delta\varphi}{2} = m \cdot \pi$ (echivalent cu $\Delta\delta = m\lambda_0$), în acest caz observîndu-se maximul principal de ordinul m; între două maxime principale, de exemplu

între maximele de ordinele m și $m+1$, există $N-1$ minime nule ale $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}}$, anume pentru acele valori ale defazajului satisfăcînd condiției : $\frac{N\Delta\varphi}{2} = Nm\pi + k\pi$, unde $k = 1, 2, \ldots N-1$).

Între două minime nule ale $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}}$, de exemplu între cele de ordinele k și $k+1$, avem cîte un maxim secundar al $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}}$, anume pentru defazajul $\Delta\varphi$ satisfăcînd condiției : $\frac{N\Delta\varphi}{2} = Nm\pi + \frac{2k+1}{2}\pi$; între două maxime principale succesive există astfel $N-2$ maxime secundare de intensități

$$\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.max.sec.}k} = \left[\frac{1}{\sin \frac{2k+1}{2N} \cdot \pi} \right]^2 \tilde{\mathscr{E}}_1, \quad k = 1, 2, \ldots N-2,$$

mult mai mici decît intensitatea ($N^2\,\tilde{\mathscr{E}}_1$) maximelor principale. Intensitatea maximelor secundare scade monoton spre mijlocul distanței dintre cele două maxime principale. Deoarece distanța x dintre centrul figurii de interferență și punctul de convergență pe ecran a fasciculelor străbătînd lama sub unghiul r este dată de expresia : $x = f \operatorname{tg} \varphi = f \operatorname{cotg} i = f \operatorname{cotg} [\arcsin (n \sin r)]$, cu derivată finită în raport cu r, iar variația cosinusului unghiului r între maximele principale de ordinele m și $m+1$: $\cos r_{m+1} - \cos r_m = \frac{\Delta\delta}{2nd} \leqslant 10^{-5}$, rezultă că — cel puțin în zona a cîtorva maxime principale învecinate — variația distanței x cu $\cos r$ (și deci cu defazajul $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2nd \cos r$) este liniară. Rezultă că aspectul graficului $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}} = f(x)$ este întrutotul similar graficului $\tilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}} = f(\Delta\varphi)$ prezentat în fig. 13, b a breviarului, pentru cazul $N = 9$.

2.3.14. Conform rezultatelor problemei precedente, valoarea $\tilde{\mathscr{E}}_{rez.}$ la jumătatea distanței dintre un maxim principal și primul minim nul, deci pentru : $\frac{N\Delta\varphi}{2} = Nm\pi + \frac{\pi}{2}$, este : $\tilde{\mathscr{E}}'_{\text{rez}} = \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} \right]^2 \cdot \tilde{\mathscr{E}}_1 \approx \frac{4N^2}{\pi^2} \cdot \tilde{\mathscr{E}}_1 = \frac{4}{\pi^2} \cdot \tilde{\mathscr{E}}_{\text{max.princ.}}$, pentru $N \gg 1$. În baza relației (32) a

breviarului, obținem valoarea vizibilității corespunzînd celor două sisteme de maxime de interferență

$$V = \frac{\tilde{\mathscr{E}}'_{\text{rez.}} \cdot 2}{\tilde{\mathscr{E}}_{\text{max.princ.}}} = \frac{2}{N^2} \cdot \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}}\right]^2 \approx \frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}81055 \text{ (pentru } N \gg 1).$$

2.3.15. Se observă că valoarea vizibilității corespunzînd poziției relative descrise în problema precedentă, a două sisteme de maxime de interferență, este aproximativ egală cu criteriul de rezolvare pentru ochi. Rezultă că valoarea minimă $\delta\lambda$ a diferenței lungimilor de undă ale componentelor monocromatice, pentru care mai poate fi rezolvată figura de interferență formată prin suprapunerea celor două sisteme de maxime principale, corespunde situației cînd — pentru o aceeași valoare a diferenței de drum optic $\Delta\delta$ — se suprapun maximul de ordinul m al componentei $\lambda_0 + \delta\lambda$ cu primul minim nul al componentei λ_0

$$\Delta\delta = \frac{\lambda_0 + \delta\lambda}{2\pi} \Delta\varphi_{\lambda_0+\delta\lambda} = \frac{\lambda_0 + \delta\lambda}{2\pi} 2m\pi = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi_{\lambda_0} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{2(Nm\pi + \pi)}{N};$$

rezultă $\delta\lambda = \frac{\lambda_0}{mN}$, de unde — înlocuind valoarea λ_0 indicată în enunț și valorile m, N obținute în cadrul problemei 2.3.13

$$\delta\lambda \approx \frac{7 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{9{,}63 \cdot 10^4 \cdot 10} \approx 7{,}27 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 7{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ Å}.$$

2.3.16. a) Variația diferenței de drum optic între centrul figurii de interferență și inelele apropiate de centru (pentru care $r \ll f$) este: $\Delta\delta_c - \Delta\delta = 2gn(1 - \cos r) \approx gn \frac{\sin^2 i}{n^2} \approx \frac{g}{n} \operatorname{tg}^2 i = \frac{g}{n} \frac{r^2}{f^2}$.

Însă $\Delta\delta_c = m_0 \lambda_0$, iar $\Delta\delta_i = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0$, deci:

$\Delta\delta_c - \Delta\delta_i = \left(m_0 - m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 = \frac{2k-1}{2}\lambda_0$, unde $k = m_0 - m + 1$ este ordinul inelului întunecat, obținut prin numerotarea obișnuită, începînd de la inelul întunecat cel mai apropiat de centrul figurii de interferență; în baza celor două expresii obținute pentru diferența

$\Delta\delta_c - \Delta\delta_i$, rezultă valoarea evaluată (pentru $r \ll f$) a razei inelului întunecat de ordin k

$$r_{\text{int.}k} = \sqrt{\frac{(2k-1)\, n\, \lambda_0}{2g}}.$$

În final, găsim

$$\lambda_0 = \frac{d^2_{\text{int.}k} \cdot g}{2(2k-1)nf^2} = \frac{17{,}15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2 \cdot 49 \cdot 1{,}5 \cdot 4 \text{ m}^2} = \frac{2{,}941225 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{588} \approx$$

$$\approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 5000 \text{ Å}.$$

b) Valoarea $\Delta\lambda$ a lărgimii intervalului spectral $\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda$ pentru care maximul principal de ordinul m al componentei $\lambda_0 + \Delta\lambda$ se suprapune cu maximul principal de ordinul $m+1$ al componentei λ_0, rezultă din condiția: $\Delta\delta_m(\lambda_0 + \Delta\lambda) = m(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \Delta\delta_{m+1}(\lambda_0) = (m+1)\lambda_0$, de unde: $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{m}$.

Conform definiției cîmpului dispersiv (v. breviarul):

$$G \leqslant \Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{m}, \text{ de unde: } G \approx \frac{\lambda_0}{m} = \frac{\lambda_0^2}{2\, gn \cos r} \approx \frac{\lambda_0^2}{2\, gn}.$$

Efectuînd calculele, obținem: $G \approx \frac{25 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1{,}5} \approx 8{,}33 \cdot 10^{-12} \text{ m} =$ $= 0{,}083$ Å.

Rezultă că, pentru a putea fi observate inelele Heidinger cu ajutorul dispozitivului descris, este necesar ca radiația utilizată (cu $\lambda \approx 5\,000$ Å) să prezinte o bună monocromaticitate (lărgimea liniei spectrale, $\Delta\lambda$, să fie mai mică sau de ordinul a cca. 0,05Å).

2.3.17. a) După cum se constată din fig. 2.3.17 R (reprezentînd secțiunea piesei studiate cu un plan paralel cu normalele fețelor plane analizate), diferența de drum optic a razelor reflectată în A, respectiv emergentă din A după reflexia în C este: $\Delta\delta = n(CD + AC)$, unde:

$$AC = \frac{g}{\cos\alpha}, \quad CD = AC \cos 2\alpha =$$

$$= g \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \text{ cu notația } g = AB.$$

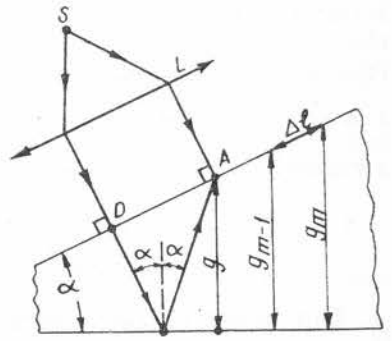


Fig. 2.3.17 R

Rezultă : $\Delta\delta = \frac{n\,g}{\cos\,\alpha}\cdot(1+\cos 2\alpha) = 2ng\,\cos\alpha \approx 2ng$, deoarece $\alpha \ll 1$ radian; dacă g_{m-1} și g_m sînt grosimile piesei corespunzînd franjelor întunecate de ordinele $m-1$ și m, deci

$$2ng_{m-1} = (2m-1)\,\frac{\lambda_0}{2},\quad 2ng_m = (2m+1)\,\frac{\lambda_0}{2}$$

avem

$$g_m - g_{m-1} = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{\lambda}{2} = \Delta l\,\sin\,\alpha \approx \Delta l\cdot\alpha.$$

În final, obținem

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{2\,\Delta l} = \frac{6\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}{2\cdot 5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}} = 6\cdot 10^{-4}\ \text{radiani} = 6\cdot 10^{-4}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot 3\,600'' \approx 2'4''.$$

b) În baza rezultatelor problemei precedente și a expresiei obținute mai sus pentru diferența de drum optic, găsim

$$G \approx \frac{\lambda_0}{m} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\delta} \approx \frac{\lambda_0^2}{2ng} = \frac{36\cdot 10^{-14}\ \mathrm{m}^2}{2\cdot 5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\cdot 1{,}5} = 2{,}4\cdot 10^{-11}\ m = 0{,}24\ \text{Å},$$

ceea ce înseamnă că — pentru a putea observa, cu ajutorul dispozitivului descris, franjele de interferență — este necesar ca lărgimea $\Delta\lambda$ a intervalului spectral în care se situează radiațiile electromagnetice incidente ($\lambda \approx 6\,000$ Å) să fie destul de redusă : $\Delta\lambda \leqslant 0{,}2$ Å.

2.3.18. a) Ținînd seamă de simetria prezentată de franjele de interferență (în acest caz, circulare), vom presupune că suprafața studiată a piesei optice prezintă — în zona contactului cu lama cu fețe plane și paralele — o curbură sferică de rază R; dacă raza r a calotei satisface relației : $\frac{r}{R} = \sin\alpha \ll 1$, atunci grosimea g a stratului de aer dintre calotă și placa cu fețe plane și paralele va fi

$$g = \frac{r^2}{2R-g} \approx \frac{r^2}{2R},\quad \text{deci}\quad \sqrt{\frac{g}{R}} \approx \frac{r}{R\sqrt{2}} \ll 1.$$

Din figură și legea refracției, rezultă

$$\gamma = \beta - \alpha = \arcsin\,[n\,\sin\,(r+\alpha)] - \alpha,$$

de unde, utilizînd teorema creșterilor finite [$f\,(b) = f\,(a) + f'(c)\cdot(b-a)$, unde $c \approx a$, dacă $b \approx a$] : $\gamma \approx i + \frac{n\cdot\cos r}{\sqrt{1-n^2\sin^2 r}}\cdot\alpha - \alpha \approx i$.

Deoarece $g_B \approx \frac{1}{2R}\,r_B^2$, avem $g_D \approx \frac{\sqrt{(2\,Rg_B - g_B\,\mathrm{tg}\,i - g_D\cdot\mathrm{tg}\,i)^2}}{2R} \approx$

$$\approx g_B - \frac{\sqrt{2Rg_B}}{R}\,(g_B + g_D)\,\mathrm{tg}\,i$$

și

$$g_D \approx g_B\left(1 - \sqrt{\frac{2g_B}{R}}\,\mathrm{tg}\,i\right)\left(1 + \sqrt{\frac{2g_B}{R}}\,\mathrm{tg}\,i\right)^{-1} \approx$$

$$\approx g_B\left(1 - 2\sqrt{\frac{2g_B}{R}}\cdot\mathrm{tg}\,i\right).$$

Întrucît : $g_B \gg g_B\cdot 2\sqrt{\frac{2g_B}{R}}\,\mathrm{tg}\,i \approx g_B - g_D = R\,[\cos\,(\alpha-\delta) - \cos\,\alpha] \approx R\,\sin\,\alpha\cdot\delta$,

rezultă că $\delta \ll 1$ radian, iar : $\varphi = 2\,[\gamma - (\alpha-\delta)] - \gamma = \gamma - 2(\alpha - \delta) \approx i$.

Rezultă că raza incidentă în D este practic paralelă cu raza incidentă în B și — întrucît $g_D \approx g_B$ — diferența de drum optic între razele incidente în D după reflexia în C, respectiv direct, va putea fi aproximată cu precizie de formula corespunzînd lamei cu fețe plane și paralele

$$\Delta\delta = \Delta\delta_p + \Delta\delta_r \approx 2n\,g\,\cos i + \frac{\lambda_0}{2}\cdot$$

În cazul inelului întunecat de ordinul m : $\Delta\delta = \frac{(2m+1)\lambda_0}{2}$, deci

$m\lambda_0 \approx 2ng_m\cos i \approx n\frac{r_m^2}{R}\cos i$, de unde $r_{\text{int.m.}} = \sqrt{m\lambda R\sec i}$.

Întrucît din experiență rezultă că : $\frac{r_n}{\sqrt{n}} \approx$ const., rezultă că porțiunea suprafeței studiate, în contact cu lama cu fețe plane și paralele, are forma unei calote sferice; deoarece pentru $m = 0$, rezultă $r = 0$, deducem că — în lumină reflectată — iluminarea cen-

trului franjelor circulare de interferență (inelelor Newton) va fi minimă.

b) $R \approx \frac{r_m^2}{m\lambda} \cos i \approx \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2}{6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8{,}66\ \mathrm{m}.$

c) Raza incidentă în B suferă, în lumină transmisă, două reflexii suplimentare față de raza incidentă în D, deci : $\Delta\delta_r = 0$ și $\Delta\delta \approx$ $\approx 2ng \cos i$. Rezultă că în centrul inelelor Newton (pentru $g = 0$) vom avea acum un maxim de iluminare, spre deosebire de figura de interferență observată în lumină reflectată, care prezintă în centrul inelelor Newton o pată întunecată.

2.3.19. a) $n_a - 1 = \frac{1}{l} \cdot \Delta m_a \cdot \lambda$, respectiv $n_{Cl} - 1 = \frac{1}{l} \cdot \Delta m_{Cl} \cdot \lambda$, de unde $n_a = 1 + \frac{10 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7} m}{2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 1{,}000275$ și $n_{Cl} = 1 + \frac{31{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}\mathrm{m}}{2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} \approx$ $\approx 1{,}000866$.

b) După cum se extrage aerul, respectiv clorul, din cuvele corespunzătoare, diferența de drum optic crește, respectiv scade, fapt echivalent cu o creștere, respectiv scădere a unghiului de incidență; rezultă că în cel de al doilea caz deplasarea franjelor de interferență se produce spre lama separatoare, iar în primul caz — în sens opus.

2.4.1. Divizăm suprafața sferei Σ, cu centrul în S și trecînd prin circumferința deschiderii circulare, în zone („Fresnel") obținute prin intersecții ale sferei Σ cu familia de sfere avînd centrul în C și razele egale cu : $CM_k = r_k = CM_0 + \frac{\lambda}{2}$, unde k este un întreg, iar M_0 este intersecția dreptei trecînd prin sursa S și centrul C al zonei de „lumină geometrică", cu sfera Σ. Raza ρ_k a circumferinței Γ_k separînd zona k de zona $k+1$ și distanța x_k dintre centrul P_k al circumferinței Γ_k (fig. 2.4.1R) și M_0, pot fi determinate în baza ecuațiilor

$$\rho_k^2 = (a^2 + r^2) - (\sqrt{a^2 + r^2} - x_k)^2 = \left(b - \frac{r^2}{2\sqrt{a^2 + r^2}} + k\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(b - \frac{r^2}{2\sqrt{a^2 + r^2}} + x_k\right)^2,$$

de unde, deoarece $\lambda \ll a, b$:

$$x_k \approx \frac{k\lambda}{2}\left(b - \frac{r^2}{2\sqrt{a^2 + r^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{a^2 + r^2} + b - \frac{r^2}{2\sqrt{a^2 + r^2}}\right)^{-1}$$

unde r este raza deschiderii circulare; dacă $r \approx \rho_k$ (k fiind de ordinul unității), întrucît : $x_k \leqslant \frac{k\lambda}{2} \ll a, b$, din egalitățile : $r^2 + x_k^2 \approx$ $\approx \rho_k^2 + x_k^2 = 2\sqrt{a^2 + r^2}\, x_k$, rezultă $\frac{r}{a} \approx \sqrt{\frac{2}{a} x_k + \left(\frac{x_k}{a}\right)^2} \ll 1$, deci

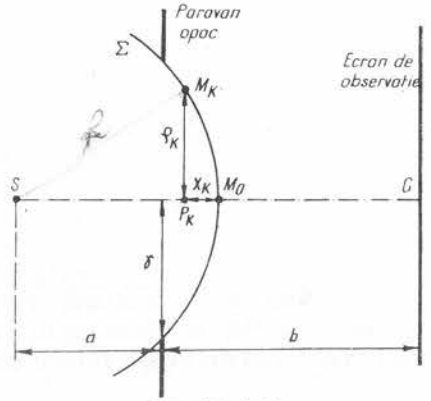


Fig. 2.4.1 R

expresiile elementelor x_k și ρ_k iau — pentru $k \sim 1$ — următoarele forme mai simple : $x_k \approx \frac{kb\lambda}{2(a+b)}$, $\rho_k \approx \sqrt{\frac{kab\lambda}{a+b}}$.

Deoarece fazele oscilațiilor incidente — la un anumit moment în C — din regiuni ale primei zone Fresnel (cea conținînd M_0) și celei de a doua zone sînt — conform principiului Huygens-Fresnel (v. breviarul) — opuse (decalate cu π radiani), rezultă că valoarea minimă a razei r pentru care valoarea cîmpului electric rezultant în C — deci și iluminarea din C — este minimă, este $r = \rho_2$.

Rezultă : $r = \rho_2 \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{m} \cdot 6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{m}}} = 10^{-3}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{mm}.$

Constatăm astfel că efectul observat — apariția (pentru o anumită deschidere a diafragmei) a unei pete întunecate în centrul zonei de „lumină geometrică", fenomen în contradicție flagrantă cu legile opticii geometrice (conform cărora în acest punct iluminarea ar trebui să fie maximă) — poate fi întrutotul explicat în baza principiului Huygens-Fresnel al opticii ondulatorii.

2.4.2. Se constată că pentru perechi de puncte conjugate S' şi C', situate la distanţe a', respectiv b' de reţea, astfel ca : $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{\lambda}{r_1^2}$, ($r_1$ — raza primei zone Fresnel), razele ρ_k ale circumferinţelor delimitînd zonele Fresnel, coincid cu razele corespunzînd zonelor reţelei

$$\rho_k = \sqrt{\frac{ka'b'\lambda'}{a'+b'}} = \sqrt{kr_1^2} = r_k;$$

deoarece şi diametrul calotei este mult mai mic ca raza sa de curbură, rezultă că delimitările de fascicule realizate de reţeaua zonată corespund cu bună aproximaţie celor corespunzătoare zonelor Fresnel, chiar dacă sursa S' nu se află în centrul de curbură al suprafeţei reţelei, şi — întrucît oscilaţiile incidente în punctul C' „conjugat" sursei, au acum (datorită ecranării zonelor de o anumită paritate) faze ce nu diferă cu mai mult de π radiani, rezultă că în C' se obţine o valoare mult întărită a iluminării, deci C' constituie o „imagine" a sursei. Valoarea distanţei focale corespunzînd reţelei zonate va fi

$$f = \lim_{a' \to \infty} (b') = \frac{r_1^2}{\lambda} = \frac{25 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$

2.4.3. a) $\frac{A_1}{A_d} = \frac{\pi \rho_1^2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2\rho_2^2}{d^2} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{0{,}665856 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} \approx 3.$

b) $\Omega = \frac{1}{4 \cdot \pi a^2} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{16\,a^2} = \frac{0{,}665856 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{16\ \mathrm{m}^2} \approx$

$\approx 4{,}16 \cdot 10^{-8}$ steradiani.

Deoarece acest unghi solid reprezintă o fracţiune extrem de redusă (cca $3 \cdot 10^{-9}$) din unghiul solid total (4π str), rezultă că oscilaţiile electromagnetice care determină în punctul de observaţie C o iluminare egală cu aceea observată în absenţa paravanului opac, se propagă într-un unghi solid extrem de îngust în jurul direcţiei rectilinii unind sursa cu respectivul punct de observaţie.

2.4.4. a) În conformitate cu principiul Huygens-Fresnel, contribuţia $dE_\theta(x,\ x + dx)$ a elementului de fantă de lărgime dx situat la distanţa x de marginea A a fantei (v. fig. 2.4.4R), la intensitatea cîmpului electric al undei difractate sub unghiul θ faţă de direcţia de incidenţă este

$$dE_\theta\,(x,\ x + dx) = C \cos(\omega t + \Delta\varphi)\,dx,$$

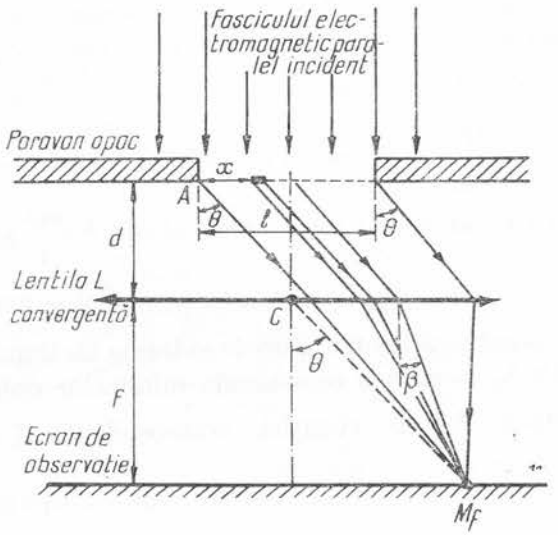


Fig. 2.4.4 R

unde $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta d = \frac{2\pi}{\lambda}\,x \sin\theta$, iar factorul C are — datorită uniformităţii fasciculului incident şi neglijării atenuărilor — o valoare constantă; deoarece $l \ll f$, direcţiile razelor incidente în planul focal sînt foarte apropiate şi putem determina valoarea intensităţii cîmpului electric rezultant în punctul M_f din planul focal, punct în care sînt concentrate fasciculele difractate sub unghiul θ, prin integrare

$$E_{\mathrm{rez.}}(\theta) \approx \int_0^l dE_\theta\,(x,\ x + dx) = \int_0^l C \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\,x \sin\theta\right) dx =$$

$$= \frac{Cl}{\xi} \sin\xi \cos(\omega t + \xi),$$

unde $\xi = \frac{\pi \sin\theta \cdot l}{\lambda}$.

În baza relațiilor (9), (10) și (17) ale breviarului și a relației deduse mai sus, rezultă media în timp a iluminării energetice în M_f

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}}(\theta) = \widetilde{\vec{S}}_{\text{rez.}} \vec{1}_A = \frac{\widetilde{E^2_{\text{rez.}}}}{\zeta} \cdot \vec{1}_v \cdot \vec{1}_A \approx \frac{C^2 l^2 \sin^2 \xi}{2\xi^2 \zeta} \cos \beta.$$

Întrucît funcția $f(\xi) = \xi^{-2} \sin^2 \xi$ își atinge maximul absolut: $f_{max} = 1$ pentru $\xi = 0$ (de unde $\theta = 0$), avem: $\widetilde{\mathscr{E}}_{\text{rez.}}(0) = \mathscr{E}_0 \approx \approx \frac{1}{2\zeta} C^2 l^2$. Soluțiile $\xi_m = m\pi$ și $\xi'_m \approx \frac{(2m+1)\pi}{2}$ (m = întreg pozitiv) ale ecuației $\frac{df}{d\xi} = 0$, corespund (pentru valori ale lui m nu prea mari în raport cu unitatea) unor valori ale $\sin\theta$: $\frac{m\lambda}{l}$ și $\frac{(2m+1)\lambda}{2l}$ — deci și unor valori ale $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\theta \cdot \left(1 - \frac{d}{f}\right)$ — mult mai mici ca unitatea; rezultă că pentru primele extreme ale iluminării: $\cos\beta \approx \approx 1$. Soluțiile $\xi_m = m\pi$ vor corespunde minimelor nule ale iluminării, iar soluțiile ξ'_m ale ecuației transcendente $\xi = \operatorname{tg}\xi$ ($\xi'_m \approx \approx \frac{(2m+1)\pi}{2}$, unde m — întreg pozitiv) vor corespunde maximelor secundare. Obținem

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\text{max. sec. } m} \approx \mathscr{E}_0 (\xi'_m)^{-2} \sin^2 \xi'_m \approx \frac{4\mathscr{E}_0}{(2m+1)^2 \pi^2}$$

deci iluminarea primului maxim secundar va fi egală cu cca $\frac{4}{9\pi^2}\mathscr{E}_0$ (aprox. 4,5 % din valoarea $\mathscr{E}_0$), iluminarea celui de al doilea maxim secundar va fi egală cu cca $\frac{4}{25\pi^2}\mathscr{E}_0$ (aproximativ 1,6 % din valoarea $\mathscr{E}_0$), ș.a.m.d.

b) Lărgimea zonei maximului principal de difracție, egală cu distanța dintre primele minime nule de difracție, este:

$$L_0 = 2f \operatorname{tg}\theta_1 \approx 2f \sin\theta_1 = 2f\frac{\lambda\xi_1}{\pi l} = 2f\frac{\lambda}{l} = \frac{1\,\text{m} \cdot 5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{125 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = 4\,\text{mm}.$$

2.4.5. În baza relațiilor (32) [definiția vizibilității] și (39) ale breviarului

$$V = \frac{\mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max}} = \frac{2\mathscr{E}\left(\frac{r_1}{2}\right)}{\mathscr{E}_0} \approx 0{,}73.$$

2.4.6. Întrucît valoarea vizibilității calculate în cadrul problemei precedente, corespunde cu aproximație valorii pentru ochi a criteriului de rezolvabilitate, considerăm dispunerea respectivă a celor

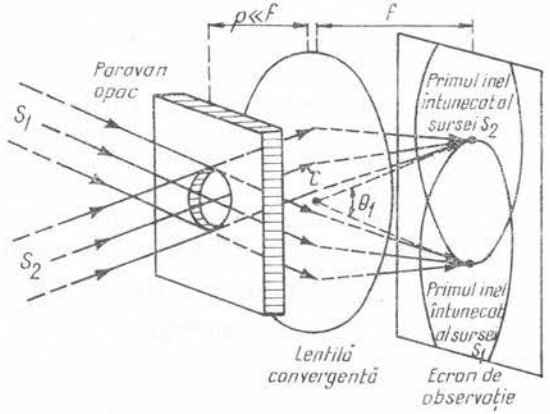


Fig. 2.4.6 R

două sisteme de inele drept limita pînă la care se pot apropia cele două sisteme, rămînînd totuși distincte pentru observația directă. Rezultă că $\psi \approx \theta_1$ (unghiul sub care se vede raza primului inel întunecat din centrul optic al lentilei) și — din cauză că $r_1 \ll f$ — avem [v. relația (39)] $\psi \approx \theta_1 \approx 1{,}22\frac{\lambda}{d}$. Efectuînd calculele, găsim

$$\psi \approx 1{,}22 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{0{,}63\,\text{m}} \approx 9{,}59 \cdot 10^{-7}\ \text{radiani} \approx 0{,}198''.$$

2.4.7. a) Întrucît $\lambda \ll r_0$, unghiul minim ψ dintre direcțiile de observație corespunzînd unor puncte ce pot fi distinse, are valoarea (v. problema precedentă): $\psi \approx \theta_1 \approx 0{,}61\frac{\lambda}{r_0}$; rezultă că distanța minimă s dintre punctele (situate la o anumită distanță

de instrumentul optic) care pot fi observate distinct, corespunde cazului cînd aceste puncte delimitează un segment avînd drept mediatoare chiar direcţia de observaţie.

În definitiv, deoarece $\psi \ll 1$ radian : $s \approx D\psi \approx 0{,}61\dfrac{\lambda D}{r_0}$. Efectuînd calculele, găsim

$$s_1 \approx 0{,}61 \cdot \frac{4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m}}{8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} \approx 0{,}076\,\mathrm{mm};$$

$$s_2 \approx 0{,}61 \cdot \frac{7{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m}}{8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} \approx 0{,}143\,\mathrm{mm}.$$

Se constată că acuitatea vederii (capacitatea de a distinge detalii de dimensiuni cît mai reduse) este considerabil mai înaltă spre marginea dinspre violet a spectrului vizibil, în raport cu cea corespunzînd marginii dinspre roşu.

b) Utilizînd pentru λ valoarea 5 500 Å corespunzînd — pentru om — maximului vizibilităţii relative în regim diurn, găsim

$$l_0 \approx 0{,}61 \cdot \frac{\lambda d}{r_0} = 0{,}61 \cdot \frac{5{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 10^{3}\,\mathrm{m}}{8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} \approx 0{,}42\,\mathrm{m}$$

respectiv

$$l_v \approx 0{,}61 \cdot \frac{\lambda d}{r_v} = 0{,}61 \cdot \frac{5{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 10^{3}\,\mathrm{m}}{3\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \approx 0{,}11\,\mathrm{m}.$$

Valorile (minime) obţinute corespund, desigur, cazului cînd linia unind extremităţile respectivului obiect este normală pe direcţia de observaţie; în cazul general, cînd dreapta trecînd prin extremităţile corpului formează unghiul ψ cu direcţia de observaţie, condiţia de distingere a respectivelor extremităţi va lua forma

$$L \geqslant l(\alpha) = \frac{l(0)}{\sin\alpha} \approx 0{,}61\,\frac{\lambda d}{r}\,\mathrm{cosec}\,\alpha$$

unde L — distanţa dintre respectivele extremităţi.

2.4.8. $l_t \approx 1{,}22\dfrac{\lambda\, d_{PL}}{D} = 1{,}22 \cdot \dfrac{6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 4\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} \approx 146{,}4\ \mathrm{m}.$

$$l_c \approx 1{,}22\,\frac{\lambda\, d_{sL}}{d} = 1{,}22 \cdot \frac{6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 4\cdot 10^{5}\,\mathrm{m}}{0{,}1\,\mathrm{m}} \approx 2{,}93\,\mathrm{m}.$$

2.4.9. În cazul în care dreapta unind cele mai apropiate avioane ale formaţiei, formează unghiul α cu direcţia de observaţie, pentru a distinge respectivele avioane este necesar (v. rezolvarea problemei 2.4.7) ca : $d \geqslant l(\alpha) \approx 0{,}61\,\dfrac{\lambda D}{r}\,\mathrm{cosec}\,\alpha$, de unde

$$\lambda \leqslant \frac{dr\,\sin\alpha}{0{,}61\,D} < \frac{dr}{0{,}61D} = \frac{200\,\mathrm{m}\cdot 2\mathrm{m}}{0{,}61\cdot 2\cdot 10^{4}\,\mathrm{m}} \approx 3{,}3\ \mathrm{cm}.$$

2.4.10. Unghiul solid corespunzînd direcţiilor din care ar putea proveni semnalele radio, poate fi determinat ca fiind numeric egal cu aria suprafeţei delimitate — pe suprafaţa sferei de rază $r = 1$ — prin intersecţia cu conul (cu vîrful în centrul sferei) ale cărui generatoare formează cu axa de simetrie unghiul minim ψ corespunzînd distingerii semnalelor electromagnetice $\psi \approx 1{,}22\,\dfrac{\lambda}{D}$; raza şi înălţimea calotei de intersecţie sînt respectiv egale cu $r_c = r\sin\psi \approx r\,\psi \ll r$, $h_c = \dfrac{r_c^2}{2r - h_c} \approx \dfrac{r_c^2}{2r} = \dfrac{r}{2}\sin^2\psi \approx \dfrac{r}{2}\,\psi^2$, deci aria suprafeţei calotei este

$$A_c = 2\pi r h_c \approx \pi r^2\psi^2, \text{ iar unghiul solid } \Omega \approx \pi\psi^2.$$

Fracţiunea din unghiul solid total reprezentată de unghiul solid corespunzînd direcţiilor din care ar putea proveni radiosemnalele rezultă ca avînd valoarea :

$$\frac{\Omega}{\Omega_t} \approx \frac{1}{4}\,\psi^2 \approx \frac{1}{4}\left(1{,}22\,\frac{\lambda}{D}\right)^2 = 3{,}72\cdot 10^{-7}.$$

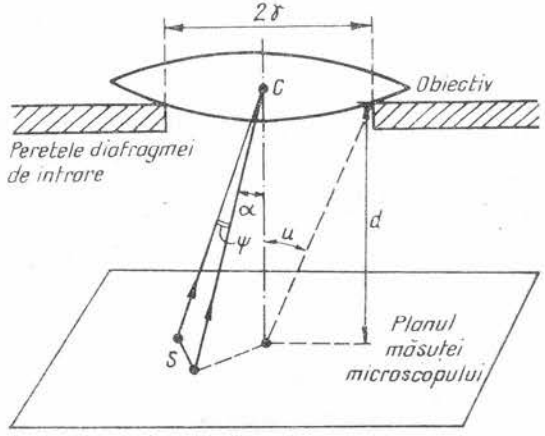


Fig. 2.4.11 R

2.4.11. a) Pentru ca extremităţile detaliului studiat să poată fi distinse, este necesar ca unghiul format de direcţiile — pornind din centrul optic al obiectivului — de observaţie ale acestor extremităţi, să fie mai mare sau cel puţin egal cu $\psi \approx \theta_1 \approx 0{,}61\frac{\lambda}{r} \ll 1$ radian; dacă direcţia de observaţie a extremităţii mai apropiate de axa optică a obiectivului formează unghiul α cu această axă, unghiul format cu axa optică de direcţia de observaţie a celeilalte extremităţi va diferi cu cel mult ψ radiani, deci va fi practic egal tot cu α. Din fig. 2.4.11, rezultă că:

$$\frac{s(\alpha)}{\sin\psi} \approx \frac{d\sec\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}, \quad \text{deci} \quad s(\alpha) \approx \psi\frac{d}{\cos^2\alpha} \approx \frac{0{,}61}{\cos^2\alpha}\frac{d}{r}\lambda =$$

$$= 0{,}61\frac{\operatorname{cotg} u\cdot\lambda}{\cos^2\alpha}.$$

Se constată că s depinde — prin unghiul α — de poziţia obiectului studiat în cîmpul vizual al microscopului; media geometrică a valorilor puterilor de separarea corespunzînd centrului ($\alpha = 0$) cîmpului vizual şi marginii acestuia ($\alpha = u$), acceptată ca putere medie de separare a microscopului, are valoarea: $\tilde{s} = s = \sqrt{s(0)\cdot s(u)} \approx$

$\approx 0{,}61\frac{\operatorname{cotg} u}{\cos u}\lambda = 0{,}61\frac{\lambda_0}{n\sin u}$, unde n este indicele absolut de refracţie al mediului dintre obiectiv şi detaliul studiat. Efectuînd calculele, găsim

$$s \approx 0{,}61\frac{\lambda_0\sqrt{d^2+r^2}}{nr} = 0{,}61\frac{6\cdot10^{-7}\text{m}\cdot5\cdot10^{-3}\text{m}}{1\cdot4\cdot10^{-3}\text{m}} \approx$$

$$\approx 4{,}6\cdot10^{-7}\text{ m} = 0{,}46\ \mu\text{m}.$$

b) $$G_s = \frac{s_{\text{ochi}}}{s_{\text{micr.}}} \approx \frac{0{,}61\frac{\lambda_0}{r_0}D_{0m}}{0{,}61\frac{\lambda_0\sqrt{d^2+r^2}}{nr}} = \frac{nrD_{0m}}{r_0\sqrt{d^2+r^2}} =$$

$$= \frac{4\cdot10^{-3}\text{ m}\cdot0{,}25\text{ m}}{0{,}8\cdot10^{-3}\text{ m}\cdot5\cdot10^{-3}\text{ m}} = 250\times.$$

c) Modificările care permit reducerea distanţei s dintre detaliile care mai pot fi — la limită — distinse, constau în: utilizarea radiaţiilor de lungimi de undă cît mai reduse (ultraviolete, X, unde asociate ale electronilor, protonilor, ionilor), introducerea între obiectiv şi microobiect a unui lichid transparent cu n relativ ridicat, creşterea razei diafragmei de intrare, reducerea distanţei obiectiv-microobiect, explorarea fotometrică a imaginii sau înregistrării imaginii.

2.4.12. Deoarece $\mathscr{E}(r)$ variază — în intervalul $r \in (0{,}35r_1,\ 0{,}45r_1)$ — practic liniar cu r, iar expresia $\frac{\mathscr{E}(r)}{\mathscr{E}_0} - 0{,}0214 = \frac{0{,}0214 - 0{,}0085}{0{,}9 - 0{,}85}\cdot\left(\frac{r}{r_1} - 0{,}85\right)$ conduce — pentru $r \in (0{,}8r_1,\ 0{,}85\ r_1)$ — la valori ale $\mathscr{E}(r)$ ceva mai mici decît cele reale, putem obţine valoarea raportului $\frac{r}{r_1}$ pentru care vizibilitatea este egală (sau ceva mai mică) decît criteriul de rezolvabilitate al fotocelulei, prin rezolvarea ecuaţiei

$$2\cdot\left[0{,}5394 - \frac{0{,}5394 - 0{,}4511}{0{,}45 - 0{,}4}\cdot\left(\frac{r}{r_1} - 0{,}4\right)\right] = \rho\cdot\left[1 + 0{,}0214 + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}0214 - 0{,}0085}{0{,}9 - 0{,}85}\cdot\left((0{,}85 - \frac{2r}{r_1}\right)\right], \text{ rezultînd: } \left(\frac{r}{r_1}\right)_{\text{lim. rezolv.}} \approx 0{,}42.$$

Deoarece $\lambda \ll$ raza obiectivului, unghiul $\theta(2r)$ sub care se văd — din centrul deschiderii circulare — sistemele de inele de difracţie care mai pot fi — la limită — deosebite cu ajutorul fotocelulei, satisface condiţiei: $\theta(2r) < \theta_1 \approx 0{,}61\cdot\frac{\lambda}{r_{\text{ob.}}} \ll 1$ radian, deci: $\frac{\theta(2r)}{\theta_1} \approx \frac{\operatorname{tg}\theta(2r)}{\operatorname{tg}\theta_1} =$

$= \left(\frac{2r}{r_1}\right)_{\text{lim. rezolv.}} \approx 0{,}84$ şi $\theta(2r) \approx 0{,}84\cdot0{,}61\cdot\frac{\lambda}{r_{\text{ob.}}} \approx 0{,}51\cdot\frac{\lambda}{r_{\text{ob.}}}$.

Rezultă valoarea puterii de separare a microscopului cu înregistrare fotografică: $s \approx 0{,}51\frac{\lambda_0}{n\sin u} = 0{,}51\frac{2\cdot10^{-7}\text{ m}}{1{,}3} \approx 0{,}08\ \mu\text{m} =$

$= 800$ Å.

2.4.13. a) În baza rezultatelor obţinute în cadrul problemelor 2.3.13, punctul d şi 2.4.4, punctul b, expresia iluminării rezultante

în punctul de convergență — din planul focal al lentilei L — al fasciculelor difractate sub unghiul θ, este

$$\mathscr{E}_{rez} \approx \frac{C^2}{2\zeta} b^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \left[\frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^2 \cdot \cos \beta$$

unde $\xi = \frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$, $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\Delta\delta = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \frac{d}{f}\right)\operatorname{tg}\theta\right]$ (v. fig. 2.4.13). Se constată că expresia iluminării rezultante depinde de unghiul θ prin trei factori:

— unul $\left[\frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x}, \text{ unde } x = \frac{\pi d}{\lambda}.(\sin\theta - \sin\theta_0)\right]$ extrem de rapid variabil cu θ, factor care impune — pentru obținerea unui maxim principal al iluminării — condiția: $\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\pi$ (m = întreg), de unde $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$,

— al doilea $\left[b^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 (\sin\theta - \sin\theta_0)^2} \sin^2 \xi\right]$ care depinde considerabil de θ, dar și de b, și impune — pentru obținerea unei valori maxime a iluminării corespunzînd unui maxim principal (deci pentru θ determinat de condiția precedentă), pentru o valoare anumită a iluminării rețelei (deci și a factorului de difracție C) de către fasciculul incident — cerința

$$\xi = \frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{2(n+1)\pi}{2}, \text{ de unde}$$

$$b(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{(2n+1)\lambda}{2}, \text{ și în fine:}$$

— ultimul, cos β, care variază mult mai lent cu θ.

b) Este necesar ca ecuația $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = 3\lambda$ să admită o soluție reală sin $\theta \leqslant 1$; rezultă deci că $d(1 - \sin\theta_0) \geqslant 3\lambda$, de unde $d_{min} = \frac{3\lambda}{1 - \sin\theta_0}$.

c) Conform celor deduse în cadrul primului punct al problemei, este necesar să fie satisfăcute simultan condițiile:

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \lambda, \quad b(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$$

deci ($b < d$)

$$b(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{\lambda}{2}; \text{ rezultă } \frac{d}{b} = 2 \text{ și } \frac{a}{b} = \frac{d-b}{b} = 1.$$

d) Întrucît, în acest caz $b(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{1}{2}d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{m}{2}\lambda$, maximul de ordinul $m = 2$ nu va putea fi observat; rezultă că al doilea maxim observat va avea ordinul $m = 3$, deci

$$d(\sin\theta_{obs,2} - \sin\theta_0) = 3\lambda \text{ și } \theta_{obs,2} = \arcsin\left[\frac{3\lambda}{d} + \sin\theta_0\right].$$

2.4.14. Deoarece (v. și rezolvarea problemei precedente):

$\lambda \leqslant m\lambda = d(\sin\theta - \sin\theta_0) \leqslant 2d$, rezultă: $d_{min} = \frac{\lambda}{2}$ deci — pentru domeniul vizibil: $d_{min} \geqslant 0{,}2$ μm (corespunzînd unui număr $\leqslant 5\,000$ trăsături pe milimetru); întrucît (v. rezolvarea problemei 2.4.11), microscoapele lucrînd în domeniul vizibil ating — cu utilizarea uleiurilor de imersie — puteri de separare de ordinul 0,13 μm, iar asigurarea unui grosisment $G \geqslant \frac{s_{ochi}}{d_{min}} = 500\times$, nu ridică — în prezent — probleme tehnice deosebite, este posibil ca — utilizînd microscoape optice avînd puteri de separare $s \leqslant 0{,}2$ μm și valori ale grosismentului $G \geqslant 500\text{X}$, să se distingă trăsăturile succesive (și deci să poată fi măsurată echidistanța) pentru orice rețea de difracție utilizabilă în domeniul vizibil, oricît de densă ar fi rețeaua.

2.4.15. a) $\lambda_m = \frac{d(\sin\theta - \sin\theta_0)}{m} = \frac{d\sin\theta}{mn} \approx \frac{0{,}04943}{2\cdot 0{,}99\cdot 10^5 \text{m}^{-1}} \approx$ $\approx 2496{,}5$ Å.

b) $G \approx \frac{\lambda_m}{m} \approx \frac{2496{,}5\text{ Å}}{3} \approx 832{,}2$ Å.

c) Impunînd condiția ca $\Delta\lambda$ să fie mai mică decît valoarea — pentru $m = 2$ — a diferenței minime $\frac{\lambda}{mN}$ dintre lungimile de undă corespunzînd unui dublet spectral care mai poate fi — la limită — rezolvat, și mai mare ca valoarea aceleiași expresii pentru $m = 3$

$$\frac{\lambda}{2nl} \approx \frac{2496{,}5\text{ Å}}{2\cdot 0{,}99\cdot 10^5 \text{m}^{-1}\cdot 10^{-2}\text{ m}} > \Delta\lambda > \frac{\lambda}{3n\cdot l} \approx \frac{2496{,}5\text{ Å}}{3\cdot 0{,}99\cdot 10^5 \text{m}^{-1}\cdot 10^{-2}\text{m}}$$

obţinem $0{,}84\ \text{Å} < \Delta\lambda < 1{,}25\ \text{Å}$, deci diferenţa lungimilor de undă ale componentelor liniei de rezonanţă a borului este — cu aproximaţie — de cca 1 Å.

2.4.16. a) Apariţia grupată, în perechi de linii, a maximelor de difracţie situate la distanţele 3,7 şi 4,08 cm, 6,55 şi 6,65 cm, respectiv 7,3 şi 7,48 cm faţă de linia de intensă înnegrire, conduce la ipoteza unei structuri (în principal) de dublet a liniei (seriei) K a cuprului; în acest caz, linia aflată la 5,6 cm va corespunde maxi-

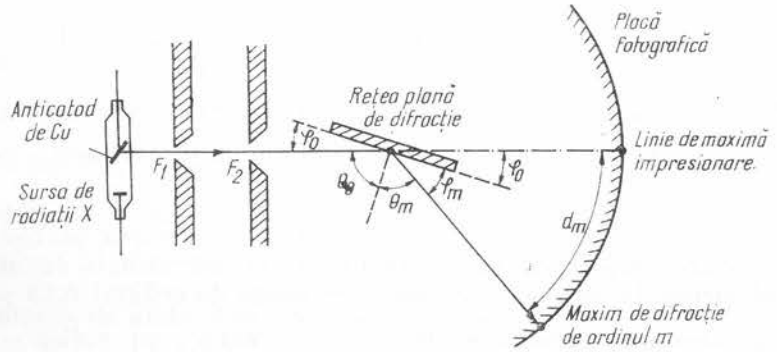


Fig. 2.4.16 R

mului principal de ordinul zero, corespunzînd unui fascicul emergent de aceeaşi parte a reţelei cu fasciculul incident, sub unghiul $\varphi = \varphi_0$ (v. fig. 2.4.16 R). În acest caz, ar rezulta

$$2\varphi_0 = \frac{d_0}{R} = \frac{5{,}6 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{2{,}1\,\text{m}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-2}\ \text{radiani}$$

respectiv pentru maximul de ordinul m, aflat la distanţa d_m de linia intensă : $\varphi_0 + \varphi_m = \frac{d_m}{R} \ll 1$ radian.

Din condiţia corespunzînd obţinerii maximului de ordinul m : $m\lambda = d(\cos\varphi_m - \cos\varphi_0) = 2d \sin\frac{\varphi_m + \varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi_0 - \varphi_m}{2} \approx \frac{d}{2}[\varphi_0^2 - \varphi_m^2] =$ $= \frac{d}{2}\frac{d_m}{R}\frac{d_m - d_0}{R}$ rezultă : $\frac{d_m(d_m - d_0)}{m} \approx 2nR^2 \cdot \lambda = f(\lambda)$.

Din analiza datelor experimentale indicate în enunţ, se poate constata că fracţia f are practic aceleaşi valori : 7,03 ; 6,9825 ; 7,0312 cm² pentru liniile aflate la 3,7 cm ($m = -1$), 6,65 cm ($m = 1$) şi 7,48 cm ($m = 2$), respectiv : 6,2016 ; 6,2225 ; 6,205 cm² pentru liniile aflate la 4,08 cm ($m = -1$), 6,55 cm ($m = 1$) şi 7,30 cm ($m = 2$), ceea ce confirmă ipoteza privind existenţa unei structuri de dublet spectral al radiaţiei X incidente.

b) Utilizînd valorile medii $f_\alpha \approx 7{,}0146$ cm², $f_\beta \approx 6{,}2097$ cm² corespunzînd celor două fracţii, valorile lungimilor de undă corespunzînd componentelor K_α, K_β ale seriei K de radiaţii X a cuprului, rezultă ca fiind

$$\lambda(K_\alpha) \approx \frac{f_\alpha}{2nR^2} \approx \frac{7{,}0146 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{2 \cdot 5{,}15 \cdot 10^5\,\text{m}^{-1} \cdot 4{,}41\ \text{m}^2} \approx 1{,}544\ \text{Å}$$

$$\lambda(K_\beta) \approx \frac{f_\beta}{2nR^2} \approx \frac{6{,}2097 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 5{,}15 \cdot 10^5\,\text{m}^{-1} \cdot 4{,}41\ \text{m}^2} \approx 1{,}367\ \text{Å}.$$

2.4.17. a) Întrucît, obţinerea maximelor de difracţie în raport cu fiecare direcţie de periodicitate este condiţionată de satisfacerea unei relaţii de tipul : $m\lambda = d(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \vec{d}\cdot\vec{\delta} - \vec{d}\cdot\vec{i} = \vec{d}(\vec{\delta} - \vec{i})$, cu m=întreg, rezultă că pentru obţinerea maximelor de difracţie corespunzînd unei reţele tridimensionale, este necesară satisfacerea simultană a condiţiilor (lui Laue) : $\vec{a}(\vec{\delta} - \vec{i} = m'\lambda$, $\vec{b}\cdot(\vec{\delta} - \vec{i}) = p'\lambda$, $\vec{c}(\vec{\delta} - \vec{i}) = q'\lambda$, cu m', p', q' = numere întregi.

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ fiind vectori necoplanari, implicit şi vectorii (perioade ale „reţelei reciproce") : $\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{V}$, $\vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{V}$, $\vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{V}$ [unde $V = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ este volumul paralelipipedului oblic avînd muchiile $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$] sînt necoplanari şi — prin urmare — putem exprima vectorul $\vec{\delta} - \vec{i}$ în forma :

$$\vec{\delta} - \vec{i} = \lambda[m''\vec{a}' + p''\vec{b}' + q''\vec{c}'].$$

Înlocuind această expresie în ecuaţiile Laue, deducem că : $m'' = m'$, $p'' = p'$, $q'' = q'$; în fine, notînd prin n divizorul comun al numerelor întregi m', p', q' şi prin m, p, q cîturile $\frac{m'}{n}$, $\frac{p'}{n}$, respectiv $\frac{q}{n}$, deducem :

$$\vec{\delta} - \vec{i} = n\lambda[m\vec{a}' + p\vec{b}' + q\vec{c}'] = n\lambda\vec{r}.$$

Întrucît produsele scalare $\left(\frac{\vec{a}}{m}-\frac{\vec{b}}{p}\right)\cdot(\vec{\delta}-\vec{i})$, $\left(\frac{\vec{b}}{p}-\frac{\vec{c}}{q}\right)\cdot(\vec{\delta}-\vec{i})$ sînt nule, rezultă că vectorul $\vec{\delta}-\vec{i}$ este normal pe planul trecînd prin vîrfurile vectorilor (toți cu originea în același nod al rețelei) $\frac{\vec{a}}{m}$, $\frac{\vec{b}}{p}$, $\frac{\vec{c}}{q}$ (așa-numitul plan de „indici Miller" : m, p, q); rezultă că vectorul $\vec{\delta}$ corespunzînd maximului de difracție caracterizat de

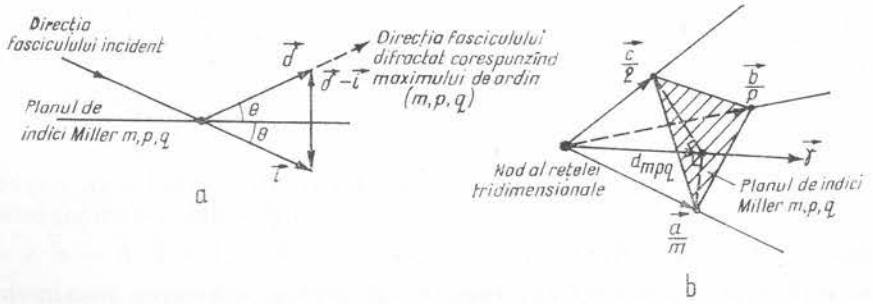


Fig. 2.4.17 R

valorile întregi m, p, q, este coplanar cu $\vec{i}$ și normala la planul de indici Miller m, p, q, iar unghiurile formate de direcțiile fasciculelor incident și difractat cu normala la respectivul plan sînt (fig. 2.4.17 R, a) egale (cu alte cuvinte, fenomenul se petrece ca și cînd fasciculul incident ar suferi o reflexie pe planul de indici Miller m, p, q).

c) Deoarece : $d_{mpq}\, r = \frac{\vec{a}}{m}\,\vec{1}_r\, r = \frac{\vec{a}}{m}\,\vec{r} = 1$, unde $\vec{1}_r$ este vectorul unitar corespunzînd direcției și sensului vectorului $\vec{r} = m\vec{a}' + p\,\vec{b}' + q\,\vec{c}'$, iar d_{mpq} este (fig. b) distanța dintre planele succesive de indici m, p, q, rezultă : $\vec{\delta}-\vec{i} = 2\sin\theta_{mpq} = \frac{n\lambda}{d_{mpq}}$, respectiv (cu n = întreg) :

$$2d_{mpq}\sin\theta_{mpq} = n\lambda \text{ (legea lui Wulf și Bragg).}$$

2.4.18. a) $\sin\theta_{min} = \frac{m_{min}\,\lambda}{2d_{max}} = \frac{\lambda}{2a}$, de unde :

$$a = \frac{\lambda}{2\sin\theta_{min}} \approx \frac{1{,}242\ \text{Å}}{2\cdot 0{,}27284} \approx 2{,}826\ \text{Å}.$$

b) Întrucît volumul molului de NaCl poate fi obținut în baza expresiilor $V = \frac{M}{\rho}2 = \mathcal{N}a^3$, obținem :

$$a = \sqrt[3]{\frac{M}{2\mathcal{N}\rho}} \approx \sqrt[3]{\frac{5{,}844\cdot 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}}{2\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\cdot 2{,}16\cdot 10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}} \approx$$
$$\approx 2{,}8201\ \text{Å}.$$

2.5.1. a) Notînd direcția oscilației intensității cîmpului electric prin x : $\vec{E}_0 \parallel \vec{1}_x$, în baza legii a doua a dinamicii avem

$$ma_x = qE - F_r - R_{el} = qE - rv_x - h\xi;$$

ținînd seamă că mișcarea particulei are loc în lungul axei x, iar deplasarea momentană a particulei este dată de funcția $\xi(t)$, avem : $r_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$, $a_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$, deci ecuația diferențială a mișcării are forma

$$m\cdot\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + h\xi = q\,E_0\cdot\cos\omega t, \quad \text{unde } v_x = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}.$$

b) Înlocuind în ecuația diferențială mai sus dedusă, expresiile : $\xi = a\cdot\cos(\omega t+\varphi)$, $v_x = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -a\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ și $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -a\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t+\varphi)$, și grupînd termenii conținînd ca factori funcțiile $\sin\omega t$, respectiv $\cos\omega t$, obținem $aA\sin\omega t + B\cos\omega t = 0$, unde $A = (m\cdot\omega^2 - k)\cdot\sin\varphi - r\omega\cdot\cos\varphi$, respectiv $B = a[(k - m\cdot\omega^2)\cos\varphi - r\omega\cdot\sin\varphi] - qE_0$; deoarece — pentru valori date (constante) ale parametrilor particulei și cîmpului electromagnetic — factorii A și B sînt constanți, iar egalitatea $aA\sin\omega t + B\cdot\cos\omega t = 0$ trebuie să fie îndeplinită pentru orice moment t (este o identitate), după cum $\omega t = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ sau $\omega t = p\pi$ (p = întreg), deducem :

$$A = 0, \text{ de unde } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{r\omega}{m\omega^2 - k}, \text{ respectiv :}$$

$$B = 0, \text{ de unde } a = \frac{qE_0}{(k - m\omega^2)\cdot\cos\varphi - r\omega\sin\varphi} =$$
$$= qE_0[(m\omega^2 - k)^2 + r^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

2.5.2. a) Notînd prin A aria fiecărei armături, prin g distanța dintre armături și prin I_d intensitatea curentului electric de deplasare, avem :

$$I_d = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q_{arm}}{\Delta t} = \frac{dQ_{mar}}{dt} = C \frac{dU_{arm}}{dt} = \frac{\varepsilon \cdot A}{g} \cdot \frac{d\,(gE)}{dt} = \varepsilon A \cdot \frac{dE}{dt}.$$

b) Deoarece numărul ΔN_j al purtătorilor de tipul j ($j = 1,2,\ldots$ $\ldots, N$) care traversează (în cursul oscilațiilor în jurul respectivelor poziții de echilibru) aria A în intervalul de timp (extrem de scurt) $t, t + \Delta t$, este : $\Delta N_j = n_j A v_j \Delta t$, unde n_j este numărul purtătorilor de sarcină de tip j din unitatea de volum a dielectricului, iar $v_j = \frac{d\xi_j}{dt}$ este valoarea — la momentul t — a vitezei de oscilație a purtătorilor de tipul j, contribuția acestor purtători la intensitatea curentului electric determinat de cîmpul electric oscilant $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ va fi $I_j = \frac{q_j \Delta N_j}{\Delta t} = A q_j n_j \frac{d\xi_j}{dt}$; intensitatea curentului electric determinat de acțiunea cîmpului electric oscilant rezultă ca fiind egală cu suma contribuțiilor diferitelor tipuri de purtători de sarcină și a curentului de deplasare în vid (în absența oricăror particule)

$$I = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} + \sum_{j=1}^{N} A\, q_j n_j \frac{d\xi}{dt}.$$

Ținînd seamă de rezultatele problemei precedente, obținem

$$I = A\,\varepsilon_0 \frac{dE}{dt} - \omega \sin \omega t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j q_j n_j \cdot \cos \varphi_j - \omega \cdot \cos \omega t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j q_j n_j \cdot \sin \varphi_j$$

și în final

$$I = A\,\varepsilon_0 \left[1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^2 n_j (m_j \omega^2 - k_j)}{(m_j \omega^2 - k_j)^2 + r_j^2 \omega^2} \right] \cdot \frac{dE}{dt} -$$

$$- EA \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^2 n_j r_j \omega^2}{(m_j \omega^2 - k_j)^2 + r_j^2 \omega^2}.$$

c) Se constată că ultimul termen al expresiei precedente corespunde unui curent de „conducție", orientat însă în sensul opus cîmpului electric ; într-adevăr, notînd prin I_2 și S_2 cel de al doilea termen (proporțional cu E), respectiv cea de a doua sumă din expresia de mai sus, avem :

$$I_2 = -S_2 AE = -S_2 A \frac{U}{g} = \frac{U}{R_p}, \text{ unde } R_p = -\frac{g}{S_2 A};$$

presupunînd că rezistența electrică corespunzînd purtătorilor de sarcină liberi ai dielectricului (în număr extrem de redus) are valoarea (extrem de înaltă) R_1, curentul total de conducție va avea valoarea

$$I_c = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_p} = \frac{A}{g}\left(\frac{1}{\rho_1} - S_2\right) U = \frac{AU}{g\,\rho_d},$$

obținînd pentru rezistivitatea dielectricului expresia

$$\rho_d = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1 S_2}.$$

Se constată că rezistivitatea dielectricului depinde — prin factorul S_2 — de frecvența radiației electromagnetice care îl traversează ; valorile maxime ale ρ_d (deci ale pierderilor de energie în dielectric) corespund valorilor maxime ale S_2 și — după cum se constată din expresia S_2 — valorilor „de rezonanță" : $\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$. Cu alte cuvinte, fenomenul se petrece ca și cînd pentru frecvențele proprii ale oscilațiilor purtătorilor de sarcină s-ar produce un transfer maxim de energie de la unda electromagnetică (care se atenuează astfel mai puternic în zona spectrală respectivă) către purtătorii de sarcină (în fapt, dipolii electrici) ai dielectricului.

Permitivitatea dielectrică relativă depinde de asemenea de frecvență, conform relației care rezultă din expresia intensității curentului determinat de cîmpul electric oscilant

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^2 n_j (m_j \omega^2 - k_j)}{(m_j \omega^2 - k_j)^2 + r_j^2 \omega^2};$$

deoarece forța de rezistență (cu amplitudinea $r_j \omega a_j$) este uzual mult mai mică decît forța elastică (de amplitudine $k_j a_j$), variațiile considerabile ale ε_r cu frecvența se situează de asemenea în vecinătatea frecvențelor de „rezonanță" : $\nu_j = \frac{\omega_j}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$.

2.5.3. Conform legii refracției undelor electromagnetice : $r = \arcsin\left[\frac{n_1 \cdot \sin i}{n_2}\right]$; pentru ca unghiul r să depindă de frecvența radiației refractate, în condițiile unui fascicul incident policromatic bine-colimat ($i = \text{const.} \neq f(\nu)$) este necesar ca $\frac{n_1}{n_2} = f(\nu)$, deci ca n_1 și n_2 să depindă de frecvența radiației electromagnetice.

Pentru dielectrici $\mu_r \approx 1$, deci $n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$; rezultă (v. problema precedentă) că este posibil să se explice dispersia undelor electromagnetice la trecerea dintr-un dielectric în altul (precum și absorbția selectivă a undelor electromagnetice), în baza acțiunii cîmpurilor electrice oscilante ale undelor electromagnetice asupra purtătorilor de sarcină „legați" (în fapt, asupra dipolilor electrici) ai respectivilor dielectrici, purtători care pot executa mici oscilații în jurul pozițiilor respective de echilibru.

2.5.4. a) Expresia permitivității dielectrice relative, obținută în cadrul problemei 2.5.2. capătă — pentru intervalul $\lambda \in (\lambda'', \lambda')$ — următoarea formă mai simplă : $\varepsilon_r \approx 1 + \frac{q_j^2 n_j}{\varepsilon_0 (k_j - m_j \omega^2)}$, de unde :

$$\frac{1}{n^2-1} \approx \frac{1}{\varepsilon_r - 1} \approx \frac{\varepsilon_0 k_j}{q_j^2 n_j} - \frac{\varepsilon_0 m_j}{q_j^2 n_j} \cdot \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = A - \frac{B}{\lambda^2}$$ (formula Cauchy).

b) Expresia : $\frac{1}{n^2 - 1} \approx 0{,}73982 - 6{,}105 \cdot 10^{-3}\, nm^2 \cdot \lambda^{-2}$, obținută plecînd de la graficul $\frac{1}{n^2 - 1} = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ construit în baza valorilor experimentale indicate în enunț, conduce la următoarele valori calculate (și erori) corespunzînd indicelui de refracție al cuarțului :

λ(Å)	2537	3034	4100	4861	5893	7685
$n_{calc.}$	1,5970	1,5763	1,5561	1,5494	1,5442	1,5398
$n_{calc.} - n_{exp.}$	+0,0007	−0,0007	−0,0004	−0,0003	0	+0,0007

Se constată că rezultatele obținute în baza modelului (mecanismului) considerat al fenomenului de dispersie, concordă satisfăcător cu valorile obținute prin măsurările directe (experimentale).

2.5.5. Distanțele p'_C, p'_F de la centrul optic al lentilei la imaginile sursei corespunzînd radiațiilor de lungimi de undă λ_C, respectiv λ_F, pot fi obținute în baza formulei lentilelor subțiri

$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f_F}$, de unde $p'_C = \frac{2f_C f_F}{2f_F - f_C}$, respectiv $p'_F = 2f_F$;

ținînd seamă că distanța dintre imaginile menționate are valoarea

$$\Delta p' = p'_C - p'_F = \frac{2f_F}{2f_F - f_C}(f_C - f_F),$$ obținem în final

$$\rho = \Delta p' \frac{d}{2p'_C} = \frac{f_F \cdot d}{2}\left(\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C}\right) = \frac{n_F - n_C}{n_F - 1}\frac{d}{2} =$$

$$= \frac{0{,}02743}{0{,}7747} \cdot 20 \text{ mm} \approx 0{,}71 \text{ mm}.$$

Se constată că amplitudinea aberațiilor cromatice este relativ mare (raza inelului „imagine" a sursei punctiforme fiind de cca. 7 ori mai mare decît puterea de separare a ochiului), ceea ce conduce la o slabă calitate a imaginilor înregistrate pe placa fotografică.

2.5.6. Lentilele fiind alipite, convergența sistemului este egală cu suma convergențelor lentilelor componente :

$\frac{1}{f} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{f_k} = \sum_{k=1}^{N} (n_k - 1)\left(\frac{1}{r'_k} + \frac{1}{r''_k}\right)$; din condiția ca $f_C = f_F$, rezultă :

$$0 = \frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \sum_{k=1}^{N} (n_{kF} - n_{kC})\left(\frac{1}{r'_k} + \frac{1}{r''_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{n_{kF} - n_{kC}}{n_{kD} - 1}(n_{kD} - 1)\left(\frac{1}{r'_k} + \frac{1}{r''_k}\right),$$

și , în final,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{f_{kD}\, \nu_k} = 0.$$

2.5.7. a) $\frac{1}{f_c} = (n_{cD} - 1)\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = 0{,}51 \cdot 2\,\text{m}^{-1} = 1{,}02\,\text{m}^{-1}$, deci :

$f_c \approx 0{,}98$ m ; $f_l = -\frac{1}{\nu_l}\nu_c f_c \approx -\frac{63{,}4}{27{,}5} \cdot 0{,}98$ m $\approx -2{,}259$ m.

b) $\frac{1}{f_l} = (n_{lD} - 1)\left(-\frac{1}{r'} + \frac{1}{r_l}\right)$, de unde $\frac{1}{r_l} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{f_l (n_{lD} - 1)} \approx \frac{0{,}413}{\text{m}}$,

deci : $r_f \approx +2{,}42$ m (suprafaţa exterioară a lentilei confecţionate din flint fiind deci convexă).

c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f_f} \approx (1{,}02 - 0{,}443)\ \mathrm{m}^{-1} = 0{,}577^{-1}$, deci : $f \approx 1{,}73$ m.

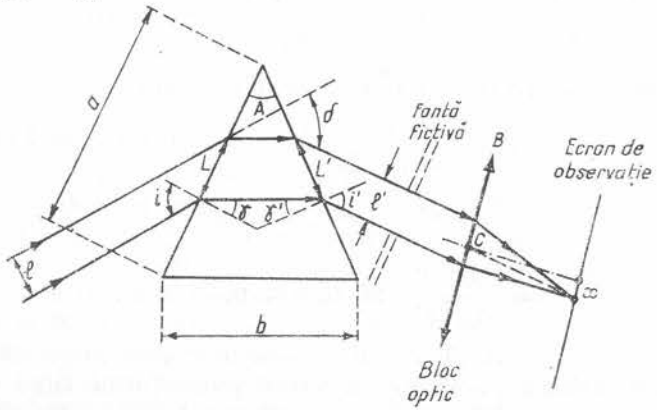


Fig. 2.5.8 R

2.5.8. a) În baza figurii 2.5.8 R şi a legii refracţiei, deducem :

$$\delta = (i - r) + (i' - r') = i + \arcsin [n \sin r'] - A,$$

de unde ($i = \text{const.}$):

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} \cdot \left[\sin r' \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} + n \cos r' \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}\lambda} \right];$$

deoarece din legea refracţiei $\frac{\sin i}{n} = \sin = \sin (A - r')$, rezultă :

$$-\frac{\sin r}{n}\,\mathrm{d}n = -\frac{\sin i}{n^2}\,\mathrm{d}n = -\cos (A - r')\,\mathrm{d}r' = -\cos r\,\mathrm{d}r',$$

obţinem în final :

$$D_u = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\cos i'} \left[\sin r' + \sin r \frac{\cos r'}{\cos r} \right] \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}.$$

b) $D_l = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\,[f \mathrm{tg}\,(\delta - \delta_m)]}{\mathrm{d}\lambda} = f \frac{1}{\cos^2(\delta - \delta_m)} \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} \approx f D_u.$

c) Fasciculele emergente par a proveni de la o fantă fictivă de lărgime : $l' = L' \cos i' = \cos r \frac{L}{\cos r'} \cos i' = \frac{\cos r \cos i'}{\cos i \cos r'} l$; conform teoriei difracţiei printr-o deschidere dreptunghiulară (v. problema 2.4.4), pentru ca figurile de difracţie corespunzînd unor fascicule emergente în direcţii formînd unghiul θ să poată fi deosebite, este necesar ca $\theta > \theta_1$, unde θ_1 este unghiul corespunzînd primului minim al iluminării

$$\sin \theta_1 = \frac{\xi_1 \lambda}{\pi l'} = \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'} \frac{\lambda}{l} \ll 1.$$

Rezultă expresia puterii de rezoluţie a prismei (în condiţiile de iluminare indicate) : $P = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = \frac{\lambda}{\Delta\delta_{min}} \frac{\Delta\delta_{min}}{\Delta\lambda_{min}} \approx \frac{\lambda}{\theta_1} D_u = \frac{l \sin A}{\cos i \cos r'} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}.$

d) Dacă : $r \approx a - r \approx A/2$, avem :

$$D_u \approx \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda},\ D_l \approx f D_u,\ \text{respectiv}\ P \approx l D_u;$$

în particular, în cazul unei iluminări a întregii feţe de intrare a unei prisme cu secţiunea în formă de triunghiu isoscel (cu vîrful în A)

$$P = 2 \sin \frac{A}{2} \frac{l}{\cos i} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = 2a \cdot \sin \frac{A}{2} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = b \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}.$$

2.5.9. a şi b) În baza relaţiilor deduse în cadrul problemei precendente şi a datelor numerice prezentate în enunţ, se obţin următoarele rezultate :

Intervalul spectral	2537 – 3034 Å	3034 – 4100 Å	4100 – 4861 Å	4861 – 5893 Å	5893 – 7685 Å
n_{mediu}	1,58665	1,56675	1,55310	1,54495	1,54165
D_u	13,13	6,34	2,92	1,73	0,92
P	38800	19220	8940	5330	2841

c) Se impune condiţia

$$\Delta\varphi = G_u \Delta\delta = G_u D_u \Delta\lambda_{min} = G_u D_u \frac{\lambda}{P} \approx G_u \frac{\lambda}{l} = G_u \frac{\lambda}{a \cdot \cos i} \geqslant$$

$$\geqslant \psi_{ochi} \approx 0{,}61 \frac{\lambda}{r_{ochi}},$$

de unde rezultă

$$(G_u)_{min} \approx 0{,}61 \cdot \frac{a \cdot \cos i}{r_{ochi}} \approx 0{,}61 \cdot \frac{0{,}1\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{1{,}54495^2}{4}}}{0{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} \approx 48 \times.$$

2.5.10. a) $\Delta\lambda_{\min} \approx \frac{\lambda}{mN} \approx \frac{5900\ \text{Å}}{2\cdot 10^3} = 2{,}95\ \text{Å} < \lambda_{D2} - \lambda_{D1}$, deci rețeaua considerată poate rezolva dubletul D al sodiului în spectrul de ordinul 1.

b) Din condiția corespunzînd maximului de difracție de ordinul m: $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$, rezultă: $d\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = m\mathrm{d}$, deci:

$D_u = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \approx \frac{m}{d} = mn$ (aproximația fiind valabilă pentru valori reduse ale unghiului θ).

În cazul de față: $D_u = 1\cdot 10^5\ \mathrm{m}^{-1} = 10^{-5}\frac{\text{radiani}}{\text{Å}} \approx 2{,}06\frac{\text{min arc}}{\text{Å}}$.

c) Este necesar ca: $\Delta\theta = G_u D_u \Delta\lambda = G_u mn\,\Delta\lambda > \theta_r = 0{,}61\cdot\frac{\lambda}{r_{\text{ochi}}}$, deci ca: $G_u \gtrsim 0{,}61\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\frac{d}{mr_{\text{ochi}}}$, de unde

$$(G_u)_{\min} \approx 0{,}61\cdot\frac{6\,000\ \text{Å}}{6\text{Å}}\cdot\frac{10^{-5}\ \mathrm{m}}{0{,}8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} \approx 7{,}6.$$

d) $D_l = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{d(f\,\mathrm{tg}\,\theta)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{f}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} \approx fD_u = 0{,}25\ \mathrm{m}\cdot 10^5\ \mathrm{m}^{-1} = 2{,}5\frac{\mu\,\mathrm{m}}{\text{Å}}$.

2.6.1. În baza relațiilor (10) și (11) ale breviarului

$$\vec{H} = \frac{1}{\zeta}\cdot(\vec{1}_v \times \vec{E}),\ \text{deci pentru dielectrici } (\mu \approx \mu_0):$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 v}\cdot(\vec{1}_v \times \vec{E}) = \frac{n}{\mu_0 c}\cdot(\vec{1}_v \times \vec{E});$$

condițiile (v. și fig. 20 a breviarului): $H_{i\parallel}\cos i + H_{r\parallel}\cos i = H_{t\parallel}\cos r$, și: $H_{i\perp} + H_{r\perp} = H_{t\perp}$, de continuitate ale componentelor „tangențiale" (paralele cu suprafața de separare a celor doi dielectrici) ale $\vec{H}$, capătă deci expresiile $n_1\cos i(E_{i\perp} - E_{r\perp}) = n_2\cos r\,E_{t\perp}$, $n_1(E_{i\parallel} - E_{r\parallel}) = n_2\cdot E_{t\parallel}$, care — împreună cu expresiile

$$\cos i\cdot(E_{i\parallel} - E_{r\parallel}) = \cos r\cdot E_{t\parallel},\ E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp},$$

ale condițiilor de continuitate ale componentelor tangențiale ale $\vec{E}$, dau în final: $E_{r\parallel} = -\frac{\mathrm{tg}\,(i-r)}{\mathrm{tg}\,(i+r)}E_{i\parallel}$, $E_{t\perp} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}\cdot E_{i\perp}$,

respectiv: $E_{t\parallel} = \frac{2\cos i\cdot\sin r}{\sin(i+r)\cdot\cos(i-r)}\cdot E_{i\parallel}$, $E_{t\perp} = \frac{2\cos i\sin r}{\sin(i+r)}E_{i\perp}$ (formulele lui Fresnel).

2.6.2. Din legea refracției: $\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2}$, rezultă că:

sign $(r-i) = \text{sign}\,(n_1 - n_2)$, unde sign $x = \frac{x}{|x|}$; în baza formulelor Fresnel rezultă că: $\text{sign}\frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \text{sign}\frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \text{sign}\,(r-i) = \text{sign}\,(n_1 - n_2)$, în concordanță cu rezultatele experiențelor de tipul Wiener (apariția unui „salt" de fază — pentru unda reflectată — cu π radiani, în cazul $n_1 < n_2$).

2.6.3. Cf. definiției [v. relația (13) a breviarului] gradului de polarizare și a formulelor (Fresnel) deduse în cadrul problemei 2.6.1, expresiile gradelor de polarizare P_r și P_t corespunzînd fasciculului reflectat, respectiv transmis, sînt date implicit de relațiile

$$\frac{1-P_r}{1+P_r} = \frac{\sum_{k=1}^{N} E_{rk\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{rk\parallel}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}E_{ik\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N}\frac{\mathrm{tg}^2(i-r)}{\mathrm{tg}^2(i+r)}E_{ik\parallel}^2} = \frac{\cos^2(i-r)}{\cos^2(i+r)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sum_{k=1}^{N} E_{ik\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{ik\parallel}^2} = \frac{\cos^2(i-r)}{\cos^2(i+r)}\cdot\frac{1-P_i}{1+P_i},$$

$$\frac{1-P_t}{1+P_t} = \frac{\sum_{k=1}^{N} E_{tk\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{tk\parallel}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{4\cos^2 i\cdot\sin^2 r}{\sin^2(i+r)}E_{ik\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N}\frac{4\cos^2 i\cdot\sin^2 r}{\sin^2(i+r)\cdot\cos^2(i-r)}E_{ik\parallel}^2} =$$

$$= \cos^2(i-r)\cdot\frac{1-P_i}{1+P_i}.$$

Se constată că — deoarece $\cos(i-r) \leqslant 1$, iar $\frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)} \geqslant 1$ — avem

$$P_r \leqslant P_i \leqslant P_t.$$

2.6.4. Din relațiile deduse în cadrul problemei precedente rezultă că pentru $P_i < 1$, fasciculul reflectat poate fi total polarizat doar dacă $P_r = -1$; pentru aceasta, trebuie să avem: $\cos(i + r) = 0$, deci trebuie ca:

$n_1 \frac{\sin i}{n_2} = \sin r = \cos i$, adică: $\operatorname{tg} i = \frac{n_2}{n_1} = n$ (legea lui Brewster).

Deoarece în acest caz $P_r = -1$, rezultă că oscilațiile cîmpului electric al undei reflectate la incidență brewsteriană au loc (exclusiv) după direcții normale pe planul de incidență.

2.6.5. Indiferent de tipul transmisiei aer-sticlă sau sticlă-aer, valoarea $\cos(i - r)$ este aceeași, deci pentru cea de a k—a transmisie avem

$$\frac{1 - P_k}{1 + P_k} = \cos^2(i - r)\,\frac{1 - P_{k-1}}{1 + P_{k-1}};\ \text{rezultă}$$

$$\frac{1 - P_t}{1 + P_t} = \frac{1 - P_{2N}}{1 + P_{2N}} = \cos^{4N}(i - r)\,\frac{1 - P_0}{1 + P_0} = \cos^{4N}(i - r).$$

În cazul incidenței brewsteriene:

$$\cos(i - r) = \cos i \cdot \cos r + \sin i \cdot \sin r = \cos i \cdot \sin i + \sin i \cdot \cos i =$$

$$= \sin 2i = \frac{2 \operatorname{tg} i}{1 + \operatorname{tg}^2 i} = \frac{2n}{1 + n^2},\ \text{deci, cu valoarea } n = 1{,}5:$$

$$\frac{1 - P_t}{1 + P_t} = = [\cos(i - r)]^{24} = \left(\frac{12}{13}\right)^{24} \approx 0{,}14647,\ \text{de unde}$$

$$P_t \approx 0{,}745.$$

2.6.6. Cf. definițiilor (52″) ale celor doi coeficienți și relației (10) a brevia rului:

$$R = \frac{\Delta\Phi_r}{\Delta\Phi_i} = \frac{A \cdot \vec{1}_A \cdot \vec{S}_r}{A \cdot \vec{1}_A \cdot \vec{S}_i} = \frac{S_r}{S_i} = \frac{\sum_{k=1}^{N} (E_{rk\parallel}^2 + E_{rk\perp}^2)}{\sum_{k=1}^{N} E_{ik}^2},\ \text{respectiv}$$

$$T = \frac{\Delta\Phi_t}{\Delta\Phi_i} = \frac{A \cdot \vec{1}_A \cdot \vec{S}_t}{A \cdot \vec{1}_A \cdot \vec{S}_i} = \frac{\cos r \cdot S_t}{\cos i \cdot S_i} = \frac{\zeta_1 \cos r}{\zeta_2 \cos i} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} (E_{tk\parallel}^2 + E_{tk\perp}^2)}{\sum_{k=1}^{N} E_{ik}^2};$$

ținînd seamă de formulele (Fresnel) deduse în cadrul problemei 2.6.1, precum și de definiția gradului de polarizare, obținem în final

$$R = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} E_{ik\parallel}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{ik}^2} + \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} E_{ik\perp}^2}{\sum_{k=1}^{N} E_{ik}^2} =$$

$$= \frac{R_\parallel + R_\perp}{2} + P_i \cdot \frac{R_\parallel - R_\perp}{2},$$

unde:

$$R_\parallel = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)},\quad \text{iar } R_\perp = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)},$$

respectiv

$$T = \frac{n_2 \cdot \cos r}{n_1 \cdot \cos i} \cdot \left[\frac{4 \cos^2 i \cdot \sin^2 r}{\sin^2(i + r) \cdot \cos^2(i - r)} \cdot \frac{\sum E_{ik\parallel}^2}{\sum E_{ik}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4 \cos^2 i \cdot \sin^2 r}{\sin^2(i + r)} \cdot \frac{\sum E_{ik\perp}^2}{\sum E_{ik}^2} \right],$$

adică

$$T = \frac{T_\parallel + T_\perp}{2} + P_i \cdot \frac{T_\parallel - T_\perp}{2},\ \text{unde:}$$

$$T_\parallel = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i + r) \cdot \cos^2(i - r)},\ \text{iar } T_\perp = \frac{\sin 2i \cdot \sin 2r}{\sin^2(i + r)}.$$

2.6.7. Deoarece $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$, obținem: $r = \arcsin\frac{1}{2} = 30°$; valorile $R_\parallel$ și $R_\perp$ sînt: $R_\parallel = 0$, respectiv $R_\perp = 0{,}25$.

În baza expresiei coeficientului de reflexie dedusă mai sus, găsim

$$P_i = \frac{2R - (R_\parallel + R_\perp)}{R_\parallel - R_\perp} = \frac{0{,}40 - 0{,}25}{-0{,}25} = -0{,}60.$$

3.1. a) $\lambda_v = 6000\ \text{Å} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$; $\nu_v = \frac{c}{\lambda_v} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$

$$E_v = h\nu_v = 6{,}6262 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3{,}3131 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

$$p_v = \frac{h}{\lambda_v} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}}{6\cdot 10^{-7}} \approx 1{,}1043\cdot 10^{-27}\ \mathrm{J\cdot s\cdot m^{-1}}$$

$$m_v = \frac{E_v}{c^2} = \frac{3{,}3131\cdot 10^{-19}}{(3\cdot 10^8)^2} \approx 3{,}681\cdot 10^{-36}\ \mathrm{kg}.$$

b) $\lambda_R = 1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m}, \quad \nu_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3\cdot 10^8}{10^{-10}} = 3\cdot 10^{18}\ \mathrm{Hz}$

$$E_R = h\nu_R = 6{,}6262\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{18} = 1{,}98786\cdot 10^{-15}\ \mathrm{J}$$

$$p_R = \frac{h}{\lambda_R} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}}{10^{-10}} = 6{,}6262\cdot 10^{-24}\mathrm{J\cdot s\cdot m^{-1}}$$

$$m_R = \frac{E_R}{c^2} = \frac{1{,}98786\cdot 10^{-15}}{(3\cdot 10^8)^2} = 2{,}2087\cdot 10^{-32}\ \mathrm{kg}.$$

c) $\lambda_\gamma = 10^{-2}\ \text{Å}, \quad \nu_\gamma = \frac{c}{\lambda_\gamma} = \frac{3\cdot 10^8}{10^{-12}} = 3\cdot 10^{20}\ \mathrm{Hz}$

$$E_\gamma = h\nu_\gamma = 6{,}6262\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{20} = 1{,}98786\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda_\gamma} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}}{10^{-12}} = 6{,}6262\cdot 10^{-22}\ \mathrm{J\cdot s\cdot m^{-1}}$$

$$m_\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2} = \frac{1{,}98786\cdot 10^{-13}}{(3\cdot 10^8)^2} = 2{,}2087\cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}.$$

3.2. $E_0 = m_0 c^2 = 9{,}1095\cdot 10^{-31}\ (3\cdot 10^8)^2 = 8{,}1986\cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} =$
$= 0{,}5117\cdot 10^6\ \mathrm{eV} = 0{,}5117\ \mathrm{MeV}$

$$\nu_f = \frac{E_0}{h} = \frac{8{,}1986\cdot 10^{-14}}{6{,}6262\cdot 10^{-34}} = 1{,}237\cdot 10^{20}\ \mathrm{Hz}$$

$$\lambda_f = \frac{c}{\nu_f} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}237\cdot 10^{20}} = 2{,}425\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} \approx 0{,}02425\ \text{Å}$$

$$p_f = \frac{h}{\lambda_f} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}}{2{,}425\cdot 10^{-12}} = 2{,}73\cdot 10^{-22}\ \mathrm{J\cdot s\cdot m^{-1}}$$

3.3. $E_{min} = h\nu_m = h\frac{c}{\lambda_M} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{5{,}77\cdot 10^{-7}} =$
$= 3{,}345\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}15\ \mathrm{eV}$

3.4. $E_{ex} = h\nu_m = h\frac{c}{\lambda_M}$

Li $\lambda_M = \frac{hc}{E_{ex}} = \frac{6{,}6262\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1{,}6022\cdot 10^{-19}}\frac{1}{E_{ex}[\mathrm{eV}]} = \frac{12{,}407}{E_{ex}[\mathrm{eV}]}\cdot 10^{-7} =$
$= \frac{12{,}407}{2{,}39}\cdot 10^{-7} = 5{,}2\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 5200\ \text{Å}$

Na $\lambda_M = \frac{12{,}407\cdot 10^{-7}}{2{,}27} \approx 5{,}46\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 5460\ \text{Å}$

Rb $\lambda_M = \frac{12{,}407\cdot 10^{-7}}{2{,}13} \approx 5{,}825\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 5825\ \text{Å}$

Cs $\lambda_M = \frac{12{,}407\cdot 10^{-7}}{1{,}89} \approx 6{,}565\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 6565\ \text{Å}$

3.5. $E = \frac{p_f c}{S\Delta t} = \frac{3\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{-4}\cdot 30} = 150\ \mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$

3.6. a) $E_{ex} = h\nu_m = h\frac{c}{\lambda_M} = 6{,}6262\cdot 10^{-34}\frac{3\cdot 10^8}{2{,}75\cdot 10^{-7}} =$
$= 7{,}25\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 4{,}5\ \mathrm{eV}$

b) $h\nu = E_{ex} + \frac{1}{2}mv^2, \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\frac{c}{\lambda_m} - E_{ex}\right)} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{9{,}1095\cdot 10^{-31}}\left(6{,}6262\cdot 10^{-34}\frac{3\cdot 10^8}{2{,}75\cdot 10^{-7}} - 7{,}25\cdot 10^{-19}\right)} =$$
$$= 9{,}1\cdot 10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

c) $E_{c\,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\,9{,}1095\cdot 10^{-31}\,(9{,}1\cdot 10^5)^2 \approx 3{,}8\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$

3.7. a) $h\nu = E_{ex} - eU_c + eU_0$, $\quad U_0 = \dfrac{h\nu - E_{ex}}{e} + U_c =$

$$= \frac{6{,}6262\cdot10^{-34}\,\dfrac{3\cdot10^8}{2{,}3\cdot10^{-7}} - 4{,}48\cdot1{,}6022\cdot10^{-19}}{1{,}6022\cdot10^{-19}} + 0{,}6 = 1{,}5\ \text{V}$$

b) $h\nu = E_{ex} - eU_c + \dfrac{1}{2}mv^2$, $\quad v = \sqrt{\dfrac{2}{m}(h\nu - E_{ex} + eU_c)} =$

$$= \left[\frac{2}{9{,}10956\cdot10^{-31}}\left(6{,}6262\cdot10^{-34}\,\frac{3\cdot10^8}{2{,}3\cdot10^{-7}} - 4{,}48\cdot1{,}6022\cdot10^{-19} + 1{,}6022\cdot10^{-19}\cdot0{,}6\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 7{,}3\cdot10^5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3.8. $p_{\text{He}} = m < v > = m\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\dfrac{8mkT}{\pi}}$

$$(p_f)_t = np_f = n\frac{h}{\lambda}, \quad n = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\frac{8mkT}{\pi}} =$$

$$= \frac{6\cdot10^{-7}}{6{,}6262\cdot10^{-34}}\sqrt{\frac{8\cdot6{,}6444\cdot10^{-27}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300}{3{,}14}} \approx 7{,}6\cdot10^3$$

3.9. a) $\quad h\nu_1 = E_{ex} + eU_{01}$, $\quad h\nu_2 = E_{ex} + eU_{02}$. $\qquad (1)$

Ţinînd seama de $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, avem

$$h\frac{c}{\lambda_1} = E_{ex} + eU_{01}, \quad h\frac{c}{\lambda_1} = E_{ex} + eU_{02}. \qquad (2)$$

Din relaţiile (2) se obţine:

$$h = \frac{e}{c}\,\frac{\lambda_2\cdot\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(U_{02} - U_{01}) =$$

$$= \frac{1{,}602192\cdot10^{-19}}{3\cdot10^8}\,\frac{2{,}45\cdot10^{-7}\cdot2{,}79\cdot10^{-7}}{(2{,}79-2{,}45)\cdot10^{-7}}(1{,}26-0{,}66) =$$

$$= 6{,}626196\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

b) $E_{ex} = h\dfrac{c}{\lambda_1} - eU_{01} = 6{,}626196\cdot10^{-34}\,\dfrac{3\cdot10^8}{2{,}79\cdot10^{-7}} -$

$$- 1{,}602192\cdot10^{-19}\cdot0{,}66 \approx 6\cdot10^{-19}\ \text{J} = 3{,}74\ \text{eV}$$

c) $E_{ex} = h\nu_m$; $\quad \nu_m = \dfrac{E_{ex}}{h}\,\dfrac{6\cdot10^{-19}}{6{,}6262\cdot10^{-34}} \approx 9{,}055\cdot10^{14}\ \text{Hz}$;

$$\lambda_M = \frac{c}{\nu_m} = \frac{3\cdot10^8}{9{,}055\cdot10^{14}} = 3{,}313\cdot10^{-7}\ \text{m} = 3313\ \text{Å}.$$

3.10. $h\dfrac{c}{\lambda} = E_{ex} + eU_0 \qquad (1)$

$$h\frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = E_{ex} + e(U_0 + \Delta U_0). \qquad (2)$$

Scăzînd din (2) pe (1), obţinem $e = hc\,\dfrac{\Delta\lambda}{\Delta U_0}\,\dfrac{1}{\lambda(\lambda - \Delta\lambda)} =$

$$= 6{,}6262\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8\,\frac{0{,}5\cdot10^{-7}}{0{,}59}\,\frac{1}{3{,}5\cdot10^{-7}\cdot3\cdot10^{-7}} \approx 1{,}6044\cdot10^{-19}\ \text{C}.$$

3.11. Presupunem că se trimite asupra unui metal energia luminoasă de $10^{-11}\ \text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fiecare atom al catodului fotocelulei are o secţiune de ordinul a $10^{-19}\ \text{m}^2$. Ca atare, fiecare atom (dacă fotonii nu sînt localizaţi) primeşte 10^{-22} J. Se ştie că fiecare foton poartă o energie $h\nu = 10^{-18}$ J. Deci, ar trebui să se aştepte

$$\tau = \frac{h\nu}{W} = \frac{10^{-18}}{10^{-22}} = 10^4\ \text{s}$$

pentru a exista posibilitatea emisiei unui fotoelectron.

Deoarece experimental se constată că efectul fotoelectric măsurabil se produce instantaneu, este de presupus că în momentul interacţiei energia luminoasă este concentrată într-un punct.

3.12. $h\cdot d\nu = -G\frac{m_f\cdot M}{r^2}\,\mathrm{d}r\,;\quad m_f=\frac{h\nu}{c^2};\quad \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}=-G\frac{M}{c^2r^2}\,\mathrm{d}r\,;$

$$\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}=-G\frac{M}{c^2}\int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,;\quad \ln\frac{\nu}{\nu_0}=-G\frac{M}{c^2R}$$

$$\frac{\nu}{\nu_0}=e^{-G\frac{M}{c^2R}}\approx 1-G\frac{M}{c^2R}\,;\quad \nu=\frac{c}{\lambda}\,;\quad \nu_0=\frac{c}{\lambda_0}\,;\quad \frac{\lambda_0}{\lambda}-1=G\frac{M}{c^2R}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\approx G\frac{M}{c^2R}=6{,}6732\cdot10^{-11}\frac{1{,}97\cdot10^{30}}{(3\cdot10^8)^2\cdot6{,}96\cdot10^8}\approx 2{,}1\cdot10^{-6}.$$

3.13 a) $h\nu_1=E_{ex}+eU_1\,;\quad h\nu_2=E_{ex}+eU_2$

$$h=\frac{e(U_1-U_2)}{\nu_1-\nu_2}=\frac{e}{c}(U_1-U_2)\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\approx$$

$$\approx\frac{1{,}6\cdot10^{-19}}{3\cdot10^8}(8{,}53-6)\frac{1{,}36\cdot10^{-7}\cdot1{,}065\cdot10^{-7}}{1{,}36\cdot10^{-7}-1{,}065\cdot10^{-7}}\approx 6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}.$$

b) $E_{ex}=h\nu_1-eU_1=6{,}63\cdot10^{-34}\ \frac{3\cdot10^8}{1{,}36\cdot10^{-7}}-$

$$-1{,}6\cdot10^{-19}\cdot6\approx5\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}=3{,}12\ \mathrm{eV}$$

c) $\nu_m=\frac{E_{ex}}{h}=\frac{5\cdot10^{-19}}{6{,}63\cdot10^{-34}}\approx7{,}54\cdot10^{14}\,\mathrm{Hz}$

$$\lambda_M=\frac{c}{\nu_m}=\frac{3\cdot10^8}{7{,}54\cdot10^{14}}\approx3{,}97\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}$$

d) $\lambda=\frac{(a+b)\sin\varphi}{K}=\frac{\sin\varphi}{KN}\,;\quad N=\frac{1\,\mathrm{mm}}{a+b}$

$$N=\frac{\sin\varphi}{K\cdot\lambda}=\frac{\sin30^\circ}{2\cdot1{,}36\cdot10^{-7}}\approx1{,}84\cdot10^6\,\mathrm{linii\cdot m^{-1}}=1840\ \mathrm{linii\cdot mm^{-1}}$$

e) $\Delta=2n\frac{\lambda}{2}=n\lambda=n\cdot1{,}36\cdot10^{-7}\,\mathrm{m},$

unde

$$n=1,2,3,\ \ldots$$

3.14. a) $\lambda_1=\frac{\frac{1}{N}\sin\varphi}{n}=5000\ \text{Å}.$

b) $n=\frac{\frac{1}{N}\sin\varphi}{\lambda_2}=4{,}4=4\,;\quad n_{tot}=4+4+1=9.$

c) $h(\nu_1-\nu_2)=e(U_1-U_2),\ h=\frac{e}{c}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U_1-U_2).$

d) $E_c=h\nu-E_{ex}=\frac{hc}{\lambda}-E_{ex}=0{,}28\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}.$

3.15. a) $E=Pt\,;\ E=20\cdot60=1200\ \mathrm{J}\,;\ E=nh\nu=nh\frac{c}{\lambda}\,;$

$$n=\frac{E\lambda}{hc}=\frac{1200\cdot5\cdot10^{-7}}{6{,}6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}=3\cdot10^{21}.$$

b) $(a+b)\sin\varphi=k\lambda\,;\quad a+b=\frac{k\lambda}{\sin\varphi}=\frac{2\cdot5\cdot10^{-7}}{1/2}=2\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}=2\mu\mathrm{m}.$

c) $x=f\,\mathrm{tg}\,\varphi\,;\quad f=\frac{1}{C}=\frac{1}{2}=0{,}5\,\mathrm{m}\,;\quad x=0{,}5\,\mathrm{tg}\,30=0{,}5\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}29\,\mathrm{m}.$

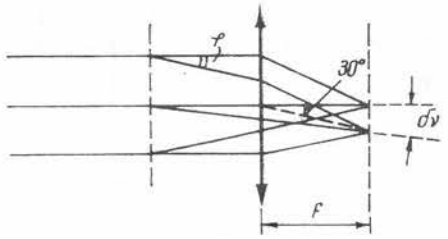


Fig. 3.15 R

d) $E_{ex}=h\nu_0=h\frac{c}{\lambda_0}=6{,}6\cdot10^{-34}\frac{3\cdot10^8}{6{,}6\cdot10^{-7}}=3\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}\,;$

$$h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda_0}+\frac{1}{2}mv^2\,;\quad \frac{1}{2}mv^2=hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)=$$

$$=6{,}6\cdot10^{-34}\frac{3\cdot10^8}{10^{-7}}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6{,}6}\right)=\frac{4{,}8}{5}\cdot10^{-19}=0{,}96\cdot10^{-19}=9{,}6\cdot10^{-20}\ \mathrm{J}$$

$$v^2=\frac{9{,}6\cdot10^{-20}\cdot2}{9\cdot10^{-31}}=2{,}13\cdot10^{11}\,\mathrm{m^2/s^2}\,;\quad v\approx4{,}61\cdot10^5\,\mathrm{m/s}.$$

3.16. În baza relației (37) a breviarului de optică ondulatorie, putem determina lungimea de undă a radiației luminoase

$$\lambda = \frac{2r^2}{(2k-1)R}.$$

Rezultă puterea corespunzînd fotonilor care contribuie la formarea acestui inel Newton

$$P = \frac{n \cdot h\nu}{t} = \frac{n \cdot hc}{t \cdot \lambda} = \frac{nhc\,(2k-1)\,R}{2r^2 \cdot t}.$$

3.17. $P = n\dfrac{W}{t} = n\dfrac{h\nu}{t} = 10^{14} \cdot \dfrac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\nu}{1} = 6{,}626 \cdot 10^{-20} \cdot \nu$

$$\nu = \frac{P}{6{,}626 \cdot 10^{-20}} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{6{,}626 \cdot 10^{-20}} = 4{,}54 \cdot 10^{17}\ \text{Hz}.$$

4.1.1. Considerăm evenimentele E_1 de coordonate spațio-temporale x_1, y_1, z_1, t_1, în referențialul (S) și x'_1, y'_1, z'_1, t'_1, în referențialul (S') și E_2 de coordonate spațio-temporale x_2, y_2, z_2, t_2, în referențialul (S), respectiv x'_2, y'_2, z'_2, t'_2, în referențialul (S')

$$* E_1 \begin{Bmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & t_1 \\ x'_1, & y'_1, & z'_1, & t'_1 \end{Bmatrix} \qquad * E_2 \begin{Bmatrix} x_2, & y_2, & z_2, & t_2 \\ x'_2, & y'_2, & z'_2, & t'_2 \end{Bmatrix};$$

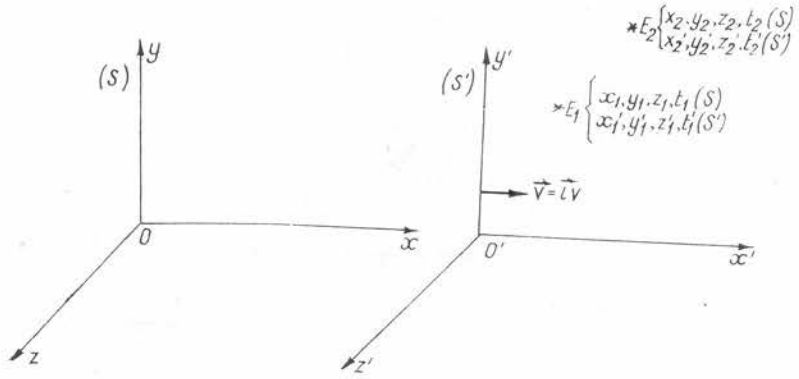


Fig. 4.1.1. R

În referențialul (S), avem durata

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

între evenimentele E_1 și E_2 și distanța la pătrat

$$\Delta l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

În referențialul (S') avem durata

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

și distanța la pătrat

$$\Delta l'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Ținînd seama de transformările lui Galilei

$$x'_2 = x_2 - v\,t_2, \quad y'_2 = y_2, \quad z'_2 = z_2, \quad t'_2 = t_2\,.$$

respectiv

$$x'_1 = x_1 - v\,t_1, \quad y'_1 = y_1\,, z'_1 = z_1, \quad t'_1 = t_1$$

rezultă $\Delta t = \Delta t'$ și $\Delta l^2 = \Delta l'^2$.

4.1.2. Experiența Michelson-Morley a verificat valabilitatea principiului relativității pentru electromagnetism.

În acest scop, Michelson și Morley au conceput o experiență considerînd că pămîntul care antrenează aerul atmosferic și observatorul se află în mișcare față de sistemul inerțial lorentzian, S_L (ecuațiile electromagnetismului erau scrise în acest sistem de referință inerțial lorentzian).

Interferometrul folosit în acest scop de Michelson și Morley, se prezintă astfel (fig. a) :

Două fascicule de lumină, emise de aceeași sursă, S, se pot suprapune (adică, pot interfera) constructiv sau distructiv într-un punct, după cum au faza relativă în punctul respectiv.

Faza relativă se poate schimba făcînd ca un „tren" de unde (corespunzător unui fascicul) să călătorească mai mult decît trenul de unde corespunzător celuilalt fascicul. În interferometrul elaborat și construit de Michelson și Morley, un fascicul de lumină — pornind de la o singură sursă S — ajunge la oglinda semitransparentă P. Considerînd raza de lumină Sa, accasta este parțial reflectată în ac și parțial transmisă în ab, ambele fiind, ulterior, returnate de oglinzile M_1 și , respectiv M_2 de-a lungul lui ba, respectiv ca ; oglinda semitransparentă P transmite parțial pe ca de-a lungul lui ad și reflectă parțial pe ba tot de-a lungul lui ad. Dacă drumurile optice

ab și ac sînt egale, cele două fascicule interferă de-a lungul lui ad. Luneta T permite punerea în evidență a franjelor de interferență.

Să presupunem, mai departe, că aparatul se mișcă în direcția Sb (figura b) cu viteza $\vec{v} = i\vec{v}$, cu care se mișcă Pămîntul pe orbita sa.

Direcțiile și distanțele parcurse de razele de lumină vor fi schimbate, astfel: Sa este reflectată de-a lungul lui af și revine apoi în

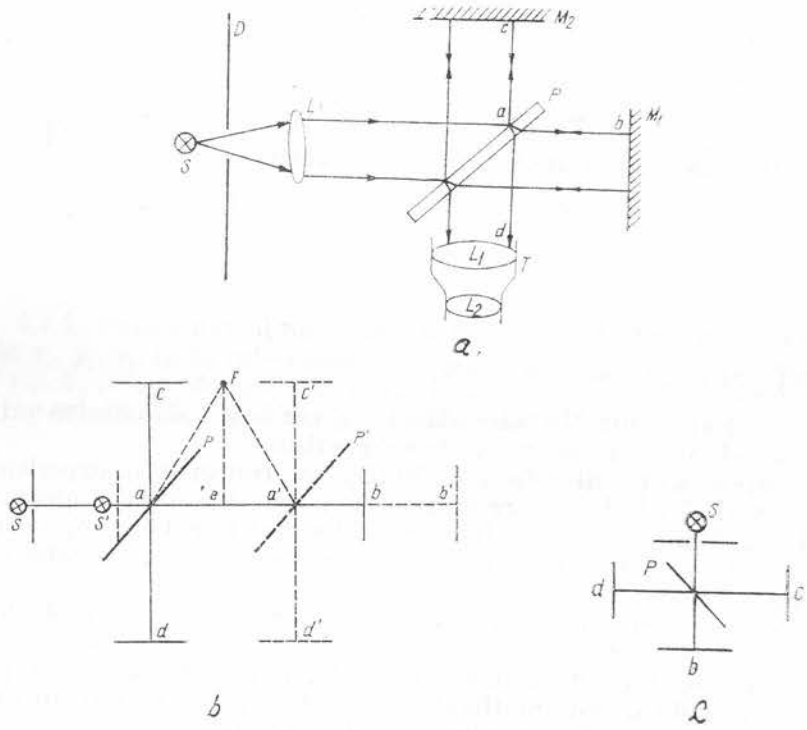


Fig. 4.1.2. R

a' de-a lungul lui fa' ș.a.m.d. (v. figura b). Notînd cu c — viteza luminii și cu v — viteza Pămîntului pe orbita sa și cu $D = ab = ac$, timpul t_1 pe care îl face lumina pentru a ajunge de la a la b și pentru a reveni de la b' la a', este

$$t_1 = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = 2\frac{D}{c}\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{1}$$

iar distanța parcursă de trenul de unde, în acest caz, va fi

$$d_1 = ct_1 = 2D\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 2D\left[1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Celălalt tren de unde luminoase, care se propagă în direcția perpendiculară pe direcția de mișcare a Pămîntului, va parcurge la dus și întors distanța

$$af + fa' = 2\,af, \tag{3}$$

unde

$$(af)^2 = (ac)^2 + (ae)^2. \tag{4}$$

Deoarece, în intervalul de timp în care Pămîntul parcurge distanța ae, lumina parcurge distanța af, avem

$$\frac{ae}{v} = \frac{af}{c}. \tag{5}$$

Deci

$$2af = 2D\frac{1}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \approx 2D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Diferența de drum a celor două trenuri de undă va fi

$$\Delta = 2D\left[1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] - 2D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = D\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{7}$$

Dacă se rotește aparatul cu $\frac{\pi}{2}$, în sensul acelor ceasornicului (figura c), diferența de drum obținută va fi aceeași, însă în direcție opusă; deci, deplasarea franjelor de interferență va fi

$$ds = 2D\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{8}$$

Notînd cu T perioada luminii (undei luminoase monocromatice utilizate) și cu df, diferența dintre două franje de interferență vecine, avem

$$\frac{ds}{df} = 2D\left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{1}{cT} = 2\frac{D}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{9}$$

Considerînd valoarea vitezei de mișcare a Pămîntului pe orbita sa $v = 3\cdot10^4$ m·s^{-1} și viteza luminii $c = 3\cdot10^8$ m·s^{-1}, deplasarea franjelor luminoase este egală cu

$$\frac{ds}{df} = 2D\cdot10^{-8}. \tag{10}$$

Distanța D fiind de circa 11m ($\approx 2.10^7\ \lambda$), ar trebui să se observe o deplasare a franjelor de 0,4 din distanța dintre ele. Michelson și Morley nu au pus în evidență nici o deplasare, deși cu interferometrul folosit se putea pune în evidență o deplasare a franjelor egală cu $\frac{0{,}4}{30}$ din distanța dintre ele.

Deci, rezultatele lui Michelson și Morley sînt contrare la ceea ce ne așteptam pe baza transformărilor lui Galileo Galilei. Experiențele au fost repetate cu diferite lungimi de undă ale luminii, cu lumină de la aștri, cu lumină extrem de monocromatică de la laseri, rezultatul fiind, de asemenea, negativ.

Rezultatul experienței lui Michelson-Morley, dovedește că viteza luminii este independentă de sistemul de referință inerțial. Deci, „frontul unei unde sferice luminoase, emisă de o sursă punctuală într-un sistem de referință inerțial, va apare ca o undă sferică pentru un observator care se află într-un alt sistem de referință inerțial". Cu alte cuvinte, legile electromagnetismului sînt invariante în trecerea de la un sistem de referință inerțial la un alt sistem inerțial.

4.2.1. Pentru deducerea transformărilor Lorentz speciale se vor considera două sisteme de referință inerțiale (S) și (S') (fig. 4.2.1 R),

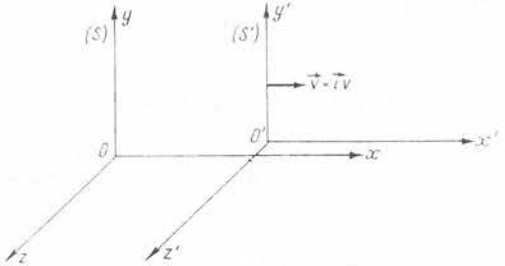


Fig. 4.2.1 R

(S') mișcîndu-se cu viteza $\vec{v} = \vec{i}\,v$ în raport cu (S) și se va presupune că în fiecare din aceste sisteme există etaloane de lungime și ceasornice ajustate conform definiției simultaneității relativiste. Fiecare eveniment, ca, de exemplu, sosirea fasciculului de lumină sau trecerea prin zero va fi înregistrată de un instrument și, astfel, măsurată în ambele sisteme. Atașăm aceluiași eveniment coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) în sistemul (S) și (x', y', z', t') în sistemul (S'). Prin trecerea de la sistemul (S) la (S') vom înțelege relațiile analitice între coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) și (x', y', z', t').

Pentru a deduce relațiile dintre coordonatele din (S') și cele din (S), se fac presupunerile:

— pentru a nu da originei unui sistem de coordonate o privilegiere fizică față de celelalte puncte ale sistemului, este necesar ca relațiile respective să fie liniare;

— fiecare punct (x', y', z') din (S') este în mișcare față de (S) cu viteza $\vec{v}$ și, în mod corespunzător, fiecare punct (x, y, z) din (S) este în mișcare față de (S') cu viteza $-\vec{v}$;

— o măsurare a vitezei luminii în ambele sisteme (S) și (S') și în orice direcție va duce la valoarea c.

Se consideră că la $t = t' = 0$, evenimentul din O' coincide cu evenimentul din O. Axele Ox și $O'x'$ coincid numai dacă pentru $y = 0$ și $z = 0$, avem: $y' = 0$ și $z' = 0$.
Formulele de transformare pentru y și z au, atunci, forma

$$y' = \alpha y + \beta z, \qquad z' = \gamma y + \delta z. \tag{1}$$

Este de așteptat, de asemenea, să se excludă distorsionările ca neesențiale, acestea cerînd ca planul xy ($z = 0$) să treacă prin planul $x'O'y'$ ($z' = 0$) etc.... Din egala îndreptățire a direcțiilor y și z (izotropia spațiului), rezultă

$$y' = \varepsilon y, \qquad z' = \varepsilon z. \tag{2}$$

Dacă factorul ε se ia egal cu unitatea în sistemul (S), observatorul din (S') va constata în direcția $O'y'$ că avem lungimea ε.

Observatorul din (S) va constata o dilatare printr-un factor ε, care inversată va face ca observatorul din (S') să măsoare lungimea $\frac{1}{\varepsilon}$ în sistemul (S). Dacă acestea se stabilesc — în mod reciproc — şi dacă ţinem seama că nu există o diferenţă obiectivă între cele două sisteme (datorită principiului relativităţii), avem $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, sau $\varepsilon = 1$. Astfel

$$y' = y;$$
$$z' = z. \tag{3}$$

Acum rămîne să deducem relaţiile de transformare dintre (x', t') şi (x, t). Conform presupunerilor făcute, $x' = 0$ se mişcă cu viteza v de-a lungul axelor $x > 0$ şi $x' > 0$, adică afirmaţia $x' = 0$ poate fi identificată cu $x = vt$. Corespunzător, afirmaţia $x = 0$ este echivalentă cu $x' = -vt'$. Transformarea va avea, prin urmare, forma

$$x' = \gamma'(x - vt),$$
$$x = \gamma\,(x' + vt'). \tag{4}$$

unde cantităţile γ şi γ' rămîn de determinat.

Ţinînd seama de faptul că nu este posibilă o măsurătoare fizică care să stabilească o diferenţă fundamentală între cele două sisteme (S) şi (S'), avem

$$\gamma = \gamma'. \tag{5}$$

Pentru determinarea valorii lui γ rămîne să aplicăm principiul invarianţei vitezei luminii c. Fie un semnal luminos emis la $t = t' = 0$ din originile O, respectiv O', în direcţia axelor x, respectiv x', după timpii t, respectiv t', avem

$$x = ct \tag{6}$$

şi

$$x' = ct'. \tag{7}$$

Atunci :

$$ct' = \gamma\, t(c - v) \tag{8}$$

şi

$$ct = \gamma t'(c + v). \tag{9}$$

Din (8) şi (9), rezultă

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{10}$$

În final, relaţiile dintre coordonatele spaţio-temporale (x, y, z, t) respectiv (x', y', z', t') sînt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{11}$$

iar transformările inverse

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \tag{12}$$

Se observă că, pentru $v \ll c$ sau $c \to \infty$, transformările Lorentz (11) respectiv (12), se reduc la transformările lui Galileo Galilei.

4.4.1. Se consideră două evenimente A şi B care au loc în punctele x_A, respectiv x_B şi la momentele t_A, respectiv t_B în sistemul de referinţă inerţial (S) cele două evenimente putînd fi legate în raport cu (S) printr-un semnal cu viteza de propagare

$$u = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} < c. \tag{1}$$

În sistemul (S') care se mişcă cu viteza v faţă de (S), avem

$$t_{A'} - t_{B'} = \frac{t_A - \frac{v}{c^2}x_A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{t_B - \frac{v}{c^2}x_B}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = (t_A - t_B)\,\frac{1 - \frac{vu}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; \tag{2}$$

Deoarece $v < c$ şi $u < c$, avem $1 - \frac{vu}{c^2} > 0$ şi $1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 > 0$. Deci, dacă

$$t'_A - t'_B > 0 \tag{3}$$

și

$$t_A - t_B > 0. \tag{4}$$

Cu alte cuvinte, dacă în (S) evenimentul A are loc înaintea evenimentului B, pentru un observator din (S'), evenimentele A și B se vor desfășura în aceeași ordine (confirmarea principiului cauzalității).

4.4.2. $\Delta S'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2] =$

$$= c^2\left(\frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2 - \left[\left(\frac{x_2 - vt_2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{x_1 - vt_1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] = c^2\left[\frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]^2 -$$

$$-\left[\left(\frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] =$$

$$= \frac{c^2(t_2 - t_1)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{v^2(t_2 - t_1)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{2v(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2v(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{c^2\frac{v^2}{c^4}(x_2 - x_1)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} -$$

$$- (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \frac{(c^2 - v^2)(t_2 - t_1)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} -$$

$$-\left[\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\cdot(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] =$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = \Delta S^2.$$

4.4.3. În sistemul de referință fix (față de care sistemul propriu se deplasează cu viteza v) durata de viață este

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Distanța parcursă în acest timp este $d = v \cdot \Delta t = 52{,}7$ m. Dacă nu ar exista dilatarea relativistă a timpului, distanța ar fi $d_0 = v \cdot \Delta t_0 = 7{,}43$ m.

4.4.4. Timpul Δt necesar parcurgerii distanței Pământ-stea-Pământ înregistrat de observatorul de pe Pământ este $\Delta t = \frac{2D}{v}$. Pe de altă parte

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde Δt_0 este timpul corespunzător înregistrat de observatorul aflat pe navă. Rezultă deci

$$\Delta t - \Delta t_0 = \frac{2D}{v}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right] = 5{,}24 \text{ zile}.$$

4.4.5. Considerăm sistemele de referință inerțial (S) și (S'), (S') mișcîndu-se față de (S) cu viteza relativă $\vec{v} = \vec{i}\,v$. Viteza luminii în (S) de-a lungul axei $O'x'$ este c, prin ipoteză.

Conform „legii" compunerii vitezelor în dinamica relativistă, avem

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}}. \tag{1}$$

Deoarece

$$u_x = c \tag{2}$$

din (1), se obține

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c. \tag{3}$$

4.4.6. a) Vom alege axa x paralelă cu direcția de mișcare a barei, iar axa y perpendiculară pe această direcție. Vom avea

$$l_{0x} = l_0 \cos \varphi\,;\; l_{0y} = l_0 \sin \varphi.$$

Față de sistemul de referință imobil, xOy, dimensiunile barei va fi

$$l_x = l_0 \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};\; l_y = l_0 \sin \varphi,$$

și rezultă

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 = l_0^2 \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + l_0^2 \sin^2 \varphi, \text{ sau } l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}.$$

b) Pentru unghiul de înclinare putem scrie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l_{0y}}{l_{0x}}$, față de axele $x_0\ y_0$, și

$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l_0 \sin \varphi}{l_0 \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ față de axele xOy, adică unghiul de înclinare crește în acest caz.

4.4.7. a) Din egalitatea fazelor, rezultă $\nu'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) = \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$ și folosind relațiile lui Lorentz

$$\nu'\left(\frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x - vt}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

sau, în final

$$\boxed{\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}}.$$

b) În cazul cînd $\frac{v}{c} = 0{,}1$, rezultă

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - 0{,}1}}{\sqrt{1 + 0{,}1}} = \sqrt{\frac{9}{11}} \approx 0{,}904.$$

Deviația relativă de frecvență va fi

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu} = 1 - \frac{\nu'}{\nu} = 1 - \sqrt{\frac{9}{11}} \approx 9{,}5\ \%.$$

Dacă $\frac{v}{c} = 0{,}01$ deviația de frecvență este neglijabilă

$$\left(1 - \frac{\nu'}{\nu} = 1 - \sqrt{\frac{99}{101}}\right).$$

c) Trecînd la lungimi de undă, obținem $\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ sau

$5 = 7 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, care ne dă $\beta = -\frac{12}{37}$ și $v = \frac{3{,}6}{3{,}7} \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx$

$\approx 100\,000$ km/s.

4.4.8. a) $E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right]$

$m_0 c^2 = 1{,}506 \cdot 10^{-10}$ J $= 936{,}615$ MeV

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{m_0 c^2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{25}{0{,}936615}} = 0{,}03610$$

$$\Delta t = \Delta t' \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2} = 10^5 \cdot 0{,}03610 = 3610 \text{ ani-lumină}.$$

b) $p = \frac{\sqrt{E_c(E_c + 2m_0c^2)}}{c} = \frac{\sqrt{25(25 + 2 \cdot 0{,}936615)}}{c} = 25{,}93 \frac{\text{GeV}}{c} =$

$$= 25{,}93 \frac{1{,}6021 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^8} = 1{,}385 \cdot 10^{-17}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4.4.9. $\Delta t_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ s este timpul mediu de viaţă al mezonului $\pi^{\pm}$ în sistemul său de referinţă (sistemul S').

Considerînd pe (S') legat de mezonul $\pi^{\pm}$ şi pe (S) legat de observator, avem

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - (0{,}99)^2}} = 1{,}42 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

şi

$$l = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}42 \cdot 10^{-7} = 42{,}6 \text{ m}.$$

4.4.10. Experienţa lui Fizeau constă în următoarele (fig. 4.4.10R). Lumina plecînd de la sursa S trece prin braţul AB al vasului V este reflectată de oglinzile M_1 şi M_2 şi se întoarce la detectorul D_1 prin braţul CD.

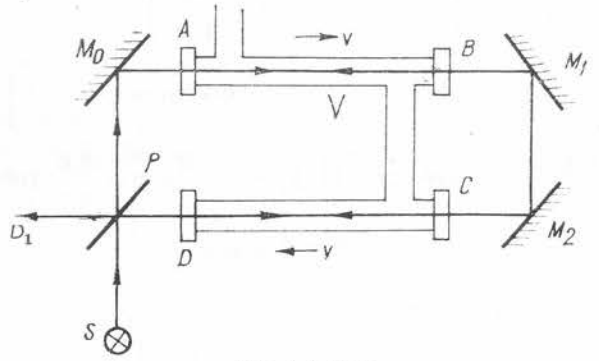


Fig. 4.4.10 R

În vasul V se află un fluid (apă) care poate fi în repaus faţă de vas sau care se poate mişca cu viteza v faţă de vasul V.

Efectuîndu-se experienţa în cazul în care fluidul are viteza $v = 0$ faţă de vas, se obţine pentru viteza luminii valoarea

$$(u_x)_0 = \frac{c}{n}, \tag{1}$$

n fiind indicele de refracţie al fluidului.

În cazul în care $v \neq 0$, se obţine

$$u_x = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{2}$$

Acest rezultat a fost interpretat ca datorîndu-se unei antrenări parţiale a „eterului", în cazul mişcării fluidului.

Din teorema relativistă a compunerii vitezelor, rezultă că acesta este un rezultat al cinematicii relativiste. Într-adevăr, în experienţa efectuată avem

$$u'_x = \frac{c}{n} \tag{3}$$

viteza luminii în sistemul de referinţă inerţial legat de fluid şi v este viteza fluidului (sistemului de referinţă inerţial S') faţă de observator (sistemul de referinţă S legat de vas). Aplicînd teorema relativistă a compunerii vitezelor, rezultă

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{\frac{c}{n} \cdot v}{\frac{c^2}{n^2}}} \approx \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{4}$$

4.4.11. Dispozitivul are forma din fig. 4.4.11 R.

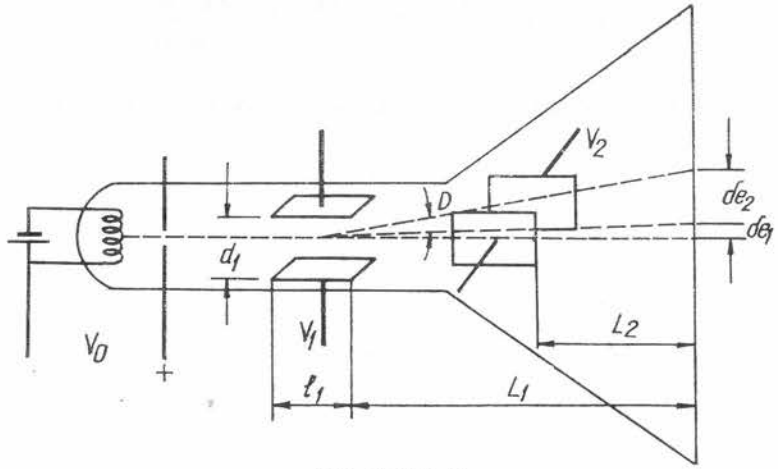


Fig. 4.4.11. R

a) Pentru a calcula viteza de ieşire a electronului din electrozii de accelerare, ţinem seama de faptul că energia cinetică a electronilor este egală cu energia primită de la cîmpul electric, adică

$$\frac{m v_0^2}{2} = e V_0 \to v_0 = \sqrt{\frac{2 e V_0}{m}} = 1{,}89 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) $E_1 = \frac{v_1}{d_1} = \frac{1\ \text{kV}}{20 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 5 \cdot 10^4 \frac{V}{\text{m}}$,

$$E_2 = \frac{v_2}{d_2} = \frac{1{,}4\ \text{kV}}{28 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 5 \cdot 10^4\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Din relația $eE = ma_y$ (forța de accelerare este produsă de cîmpul electric) rezultă

$$a_y = \frac{eE}{m} \text{ și deci } a_{y_1} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V/m}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 8{,}8 \cdot 10^{15}\ \frac{\text{m}}{s^2}.$$

De asemenea $a_{y_1} = a_{y_2}$.

c) În lungul direcției de mișcare (axa Ox), electronii au o mișcare de translație (cu viteza constantă v_0); în lungul axei Oy (perpendiculară pe direcția fasciculului și pe plăcile primului condensator), mișcarea va fi uniform accelerată, cu accelerația a_y; rezultă ecuațiile de mișcare

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}\ a_y t^2 = \frac{eE}{m}\ t^2 = \frac{eE}{2m}\ \frac{x^2}{v_0^2}.$$

d) Deviația produsă chiar în interiorul condensatorului va fi

$$e_1' = y\Big|_{x=l_1} = \frac{eE_1}{2\ m}\ \frac{l_1^2}{v_0^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V/m} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (1{,}89)^2 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{m}^2}{s^2}} =$$

$$= \frac{3{,}2 \cdot 10^{-1}}{18{,}2\ (1{,}89)^2} = \frac{0{,}16\ \text{m}}{9{,}1 \cdot 3{,}57} = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{m}.$$

e) Deviația pînă la ecran datorită primului condensator, va fi

$$e_1'' = L_1\ \text{tg}\ D_1 = L_1\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=l_1} = L_1 \frac{2eEx}{2\ mv_0^2}\Big|_{x=l_1} = \frac{L_1 e E_1 l_1}{m\ v_0^2}$$

adică

$$e_1'' = \frac{30\ \text{cm} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V/m} \cdot 20\ \text{mm}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2/s^2} = 14{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

f) Considerînd deviațiile produse de cei doi condensatori ca independente, putem considera că deviația produsă în planul orizontal de cel de al doilea condensator va fi

$$e_{2\ oriz.} = e_2' + e_2'' = \frac{eE_2 l_2^2}{2\ m\ v_0^2} + \frac{L_2 e E_2 l_2}{m v_0^2},$$

sau

$$e_{2\ oriz.} = \frac{eE_2 l_2}{m\ v_0^2}\left(\frac{l_2}{2} + L_2\right)$$

$$e_2 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V/m} \cdot 26 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2/s^2}\left(\frac{26 \cdot 10^{-3}}{2} + 24 \cdot 10^{-2}\right)\text{m} =$$

$$= \frac{8 \cdot 26 \cdot 10^{-18}}{32{,}5 \cdot 10^{-17}}\ (25{,}3 \cdot 10^{-2})\ \frac{\text{J} \cdot s^2}{\text{m} \cdot \text{kg}} = 16{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

g) Dacă tensiunea de accelerare este de 10^5V, rezultă o viteză v a electronului de ordinul lui c. Ca atare

$$mc^2 - m_0 c^2 = \text{eV}$$

sau

$$m_0 c^2\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) = \text{eV}.$$

Înlocuind valorile mărimilor m_0, c, e și v în această expresie, obținem

$$v_0 \approx 1{,}644 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot s^{-1}.$$

Mai departe, se efectuează aceleași calcule considerînd

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}.$$

Dacă s-ar fi utilizat cinematica newtoniană ca la punctul a) al problemei, am fi obținut

$$v = 1{,}89 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot s^{-1}$$

adică, am fi făcut o eroare de circa 12 %.

4.5.1. Ţinînd seama de dependenţa masei de viteză, legea a doua a lui Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

capătă următoarea formă în teoria relativităţii restrînse

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p})$$

unde

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\vec{v}.$$

Se ştie că

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\vec{v}.$$

Printr-o extensie naturală a acestei expresii în domeniul relativist, avem

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m_0\vec{v}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \vec{v}\left[\frac{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \vec{v}\,\frac{2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)^3}}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right]\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right].$$

Deci, variaţia în timp a lucrului mecanic efectuat asupra particulei duce la o creştere în timp a energiei cinetice a particulei

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right].$$

Integrînd, lucrul mecanic cedat unei particule libere fiind o creştere în energia cinetică a particulei, se obţine

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + E_0'$$

E_0' fiind o constantă de determinat. În această expresie E_c este energia cinetică a particulei dacă pentru $v = 0$, avem $E_c = 0$. Deci

$$0 = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + E_0', \quad \text{adică} \quad E_0' = -m_0c^2.$$

Energia cinetică relativistă va fi

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Atunci, energia totală E se poate scrie

$$E = m_0c^2 + T_r = E_0 + T_r,$$

unde $E_c = T_r$ este energia cinetică relativistă

$$E_0 = m_0c^2$$

este energia asociată masei de repaus, iar

$$E = mc^2$$

este energia totală a particulei.

La limită (pentru $v \ll c$) este necesar ca energia cinetică relativistă să fie identică energiei cinetice clasice.

Într-adevăr, avem

$$T = E - E_0 = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} c^2 - m_0 c^2 \approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

4.5.2. a) $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$; (1)

Ridicînd relația (1) la pătrat, avem

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$$

adică

$$E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 c^4. \qquad (2)$$

Ținînd seama de expresia

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \vec{v} \qquad (3)$$

avem

$$p^2 = m^2 v^2 = E^2 \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{c^2} \qquad (3)$$

și (2) devine

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \qquad (5)$$

b) $\dfrac{v}{c} = \dfrac{3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 10^{-1} \ll 1$, deci $m(v) \approx m_0$ și $p \approx m_0 v$.

$$E \approx \sqrt{m_0^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} =$$

$$= 9{,}11 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \sqrt{1{,}01} = 8{,}202 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

4.5.3. $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\left[1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$, $\quad E_0 = m_0 c^2$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\left[1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = 10$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0{,}99\,; \quad v = 0{,}995\, c = 2{,}985 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4.5.4. $E_c = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$

respectiv $E_c = eU$

$$U = \frac{m_0 c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{9{,}1091 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2}{1{,}6021 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}95)^2}} - 1\right) \approx 1{,}13 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

4.5.5. Energiile relativiste ale celor două particule sînt

$$W_1 = \frac{m_{01} c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{c^2}}}$$

respectiv $W_2 = m_{02}c^2$, iar impulsurile sînt

$$p_1 = \frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \text{ și } p_2 = 0.$$

Legile de conservare conduc la $W = (\alpha_1 m_{01} + m_{02})c^2$ și $p = p_1 + p_2 = \alpha_1 m_{01} v_1$, unde $\alpha_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Folosind relația $W = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ se obține pentru masa m_0 de repaus a particulei complexe expresia

$$m_0^2 = m_{01}^2 + m_{02}^2 + 2m_{01}m_{02}\alpha_1 .$$

Viteza particulei complexe este $v = \frac{pc^2}{W} = \frac{m_{01}v_1}{m_{01} + \frac{m_{02}}{\alpha_1}}$.

4.5.6. Legile conservării energiei și impulsurilor dau

$$W_1 + W_2 = m_0 c^2, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0. \tag{1}$$

Deoarece $p_1^2 = p_2^2$, din relația $W^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$ rezultă

$$W_1^2 - W_2^2 = (m_{01}^2 - m_{02}^2)c^4 \tag{2}$$

și rezolvînd sistemul de ecuații (1) și (2) în raport cu W_1 și W_2 rezultă în final

$$W_1 = \frac{m_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2m_0}c^2, \quad W_2 = \frac{m_0^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2}{2m_0}c^2.$$

4.5.7. Deoarece $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ și $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

rezultă

$$\Delta t = \frac{W}{m_0 c^2}\Delta t_0 = 2{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

4.5.8. a) Din expresiile $W = mc^2$ și $W^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$ rezultă

$$\frac{m_0}{m} = \frac{\sqrt{W^2 - p^2c^2}}{W}.$$

b) Din expresia energiei cinetice $T = mc^2 - m_0c^2$ și din relațiile anterioare, rezultă

$$\frac{m_0}{m} = \frac{p^2c^2 - T^2}{p^2c^2 + T^2}.$$

4.5.9. În primul caz

$$\frac{m_0 v^2}{2} = eU \text{ și } v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

În al doilea caz apar efecte relativiste și $mc^2 - m_0c^2 = eU$,

unde $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Făcînd înlocuirile, rezultă în final

$$v = 2{,}58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4.5.10. $T = (m - m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{101}{100}m_0v^2$

de unde rezultă : $v = 3{,}465 \cdot 10^7$ m/s.

4.5.11. Expresia energiei relativiste a unei particule este

$$W = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}c^2$$

deci

$$W^2 - \frac{v^2}{c^2}W^2 = m_0^2 c^4$$

de unde

$$\frac{v^2}{c^2} W^2 = \frac{v^2}{c^2} m^2c^4 = m^2v^2 c^2 = p^2c^2$$

și, în final

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2c^2}.$$

Pentru rezolvarea problemei propuse se aplică legile de conservare ale energiei și impulsului

$$W = mc^2 = W_1 + W_2, \quad 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Energiile relativiste ale celor 2 fragmente nucleare sînt

$$W_1^2 = p_1^2c^2 + m_1^2c^4, \; W_2^2 = p_2^2c^2 + m_2^2c^2,$$

$$W_1^2 - W_2^2 = (W_1 + W_2)(W_1 - W_2) = (m_1^2 - m_2^2)\, c^4.$$

Deci avem de rezolvat sistemul

$$W_1 + W_2 = mc^2, \; W_1 - W_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^4}{mc^2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m} c^2.$$

Astfel

$$W_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2 = 2{,}172 \cdot 10^{-8}\ \text{J} = \frac{2{,}172}{1{,}6} \cdot 10^5\ \text{MeV}$$

$$W_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2\,m} c^2 = 1{,}593 \cdot 10^{-8}\ \text{J} = \frac{1{,}593}{1{,}6} \cdot 10^5\ \text{MeV}.$$

4.5.12.

$$F = \frac{\mathrm{d}\,(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + m_0\, v \frac{v}{c^2}\left(1 -\right.$$

$$\left. - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

În mecanică $\frac{F}{m_0} = a$ = accelerația din mecanica clasică.

$$\int\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \mathrm{d}v = \int_t^{t_0} a\ \mathrm{d}t = a\ (t - t_0).$$

În prima integrală vom utiliza substituția

$$\frac{1}{c} v = \sin\varphi, \quad \frac{1}{c}\ \mathrm{d}v = \cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi, \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$$

$$\int\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \mathrm{d}v = \int_0^{\varphi} (\cos^2\varphi)^{-3/2}\, c\, \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = c\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos^2\varphi}\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= c\ \mathrm{tg}\ \varphi = c\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = c\,\frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a\ (t - t_0).$$

Prin ridicare la pătrat a ambilor membri și calcule algebrice obținem expresia lui v

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a\ (t - t_0)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}(t - t_0)^2}}; \quad \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int \frac{a\ (t - t_0)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}\ (t - t_0)}} = x - x_0.$$

Vom face din nou schimbarea de variabilă $\frac{a}{c}\ (t - t_0) = u$,

și

$$\int_{t_0}^{t} \frac{a\ (t - t_0)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}\ (t - t_0)^2}}\ \mathrm{d}t = \int_0^u \frac{c \cdot u}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{c}{a}\ \mathrm{d}u = \frac{c^2}{a}\int_0^u \frac{u\ \mathrm{d}u}{\sqrt{1 + u^2}} =$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^u \mathrm{d}\,(\sqrt{1 + u^2}) = \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + a^2}\Big|_0^u = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}\ (t - t_0)^2} - 1\right]$$

$$\left(x - x_0 + \frac{c^2}{a}\right)^2 = \frac{c^4}{a^2}\left[1 + \frac{a^2}{c^2}\ (t - t_0)^2\right]$$

$$\boxed{\frac{\left(x - x_0 + \frac{c^2}{a}\right)^2}{c^2/a^2} - \frac{(t - t_0)^2}{c^2/a^2} = 1.}$$

Deci reprezentarea grafică, într-un sistem cuadri-dimensional spațiu-timp (x, t), a liniei de univers este o hiperbolă.

Cazul nerelativist (clasic). Din definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - 0}{t - t_0}$ avem

$$v = a\,(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{a}{2}\,(t - t_0)^2.}$$

Deci reprezentarea grafică într-un sistem bidimensional spațiu-timp (x, t) este o parabolă.

4.5.13. $T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] =$

$$= 5 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 3\ \mathrm{MeV}.$$

4.5.14. $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = e\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}B$ și prin integrare în raport cu timpul

$$p = mv = e\,B\,r = 8 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}.$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} = 150\ \mathrm{MeV}.$$

4.5.15. a) Relația de conservare a energiei ne dă

$$W = W_1 + W_2 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + m_{02}\,c^2.$$

2) Relația de conservare a impulsului

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_{01}\,v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + 0\,.$$

Folosind relația de legătură dintre energie și impuls

$$W = c\sqrt{p^2 + m_0^2\,c^4},$$

putem obține masa de repaus a particulei complexe formate

$$m_0^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{W^2}{c^2} - p^2\right);$$

făcînd înlocuirile și efectuînd calculele, obținem

$$m_0^2 = m_{01}^2 + m_{02}^2 + \frac{2\,m_{01}\,m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Notînd $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \alpha$ putem scrie pentru impuls $p = \alpha\,m_0 v$ și pentru energie $W = \alpha\,m_0\,c^2$; din aceste relații obținem

$$v = \frac{p\,c^2}{W} = \frac{\alpha_1\,m_{01}\,v_1}{\alpha_1\,m_{01} + m_{02}} = \frac{m_{01}v_1}{m_{01} + \frac{m_{02}}{\alpha}}.$$

b) În acest caz putem scrie: $m_0\,c^2 = W_1 + W_2$ pentru conservarea energiei, și $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, pentru conservarea impulsului. Ridicînd la pătrat această relație și folosind relația de legătură energie-impuls, $W^2 = p^2\,c^2 + m_0^2\,c^4$, obținem $W_1^2 - W_2^2 = (m_{01}^2 - m_{01}^2)\,c^4$, pe care împărțind-o cu suma $W_1 + W_2$ obținută din relația de conservare a energiei, obținem

$$W_1 - W_2 = \frac{m_{01}^2 - m_{02}^2}{m_0^2}\,c^2.$$

Rezolvînd sistemul în W_1 și W_2 format din relațiile care dau suma și diferența energiilor, obținem în final

$$W_1 = \frac{m_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2\,m_0}\,c^2, \qquad W_2 = \frac{m_0^2 - m_{01}^2 - m_{02}^2}{2\,m_0}\,c^2.$$

4.5.16. a) Notînd cu ν_0, E_0 şi $\vec{p}_0$, frecvenţa, energia şi impulsul fotonului γ incident; cu ν, E, $\vec{p}$, aceleaşi mărimi ale fotonului după ciocnire şi cu m_0, m şi $\vec{v}$ — masa proprie de repaus a electronului, masa de mişcare şi viteza acestuia după ciocnire, conservarea energiei şi momentului se exprimă prin

$$E_0 + m_0 c^2 = E + mc^2 \tag{1}$$

unde

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \tag{2}$$

şi

$$\vec{p}_0 + 0 = \vec{p} + m\vec{v}. \tag{3}$$

Ţinînd seamă de expresiile mărimilor E_0, E şi m şi proiectînd relaţia (3) pe axele de coordonate, avem

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + \frac{m_0}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}} c^2 \tag{4}$$

$$\frac{h\nu_0}{c} + 0 = \frac{h\nu}{c}\cos\theta + \frac{m_0 v}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}}\cos\varphi \tag{5}$$

$$0 + 0 = \frac{h\nu}{c}\sin\theta + \frac{m_0 v}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}}\sin\varphi. \tag{6}$$

Formînd suma $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ din (5) şi (6), se obţine

$$\frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = h^2(\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu\cos\theta). \tag{7}$$

Relaţia (4), după ridicarea la pătrat, devine

$$\frac{m_0^2 c^4}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = h^2(\nu_0 - \nu)^2 + m_0^2 c^4 + 2h(\nu_0 - \nu) m_0 c^2. \tag{8}$$

Scăzînd pe (7) din (8), rezultă

$$m_0^2 c^4 = -2h\nu_0\nu(1 - \cos\theta) + m_0 c^2 [m_0 c^2 + 2h(\nu_0 - \nu)]. \tag{9}$$

Definind

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}, \tag{10}$$

cu ajutorul lui (9), avem

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{11}$$

unde

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} \tag{12}$$

este lungimea de undă Compton.

În concluzie, efectul Compton constă în creşterea lungimii de undă a unui foton în urma ciocnirii inelastice foton-electron, ciocnire în care fotonul transferă electronului o parte din energia şi impulsul său

b) $$E_e = h\nu_0 - h\nu = h\nu_0 - h\frac{c}{\lambda}$$

$$= h\nu_0 - h\frac{c}{\lambda_0 + \Lambda(1 - \cos\theta)}$$

$$= h\nu_0\left[1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Lambda(1 - \cos\theta)}\right]$$

$$= h\nu_0 \frac{2\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + 2\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{13}$$

şi

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{14}$$

4.5.17. Ecuația de conservare a energiei ne dă

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2 \tag{1}$$

iar ecuația de conservare a impulsului

$$\frac{h\nu}{c}\vec{u}_\nu = \frac{h\nu'}{c}\vec{u}_{\nu'} + m\vec{v} \tag{2}$$

sau

$$\frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2}\cos\varphi = m^2v^2. \tag{3}$$

Ecuația de conservare a impulsului scrisă pe componente ne dă

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi + mv\cos\theta, \quad 0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\varphi - mv\sin\theta. \tag{4}$$

Cum $\lambda\nu = c$, rezultă : $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot10^{10}\ \text{cm/s}}{0{,}11\cdot10^{-8}\ \text{cm}} = \frac{3}{1{,}1}\cdot10^{18}\ \text{s}^{-1}$.

Ultimele două ecuații ne permit să aflăm frecvența ν' a cuantei difuzate și viteza v a electronului reculat în funcție de constanta lui Planck h ; obținem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{mv\sin\theta}{mv\cos\theta} = \frac{\frac{h\nu'}{c}\sin\varphi}{-\frac{h\nu'}{c}\cos\varphi + \frac{h\nu}{c}} = \frac{\nu'\sin\varphi}{-\nu'\cos\varphi + \nu} \tag{5}$$

și de aici

$$\nu'\operatorname{tg}\theta\cos\varphi + \nu'\sin\varphi = \nu\operatorname{tg}\theta. \tag{6}$$

sau

$$\nu'\left(\frac{\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{c}{\lambda}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{7}$$

de unde

$$\lambda' = \lambda\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}. \tag{8}$$

Din această ecuație și cea de a doua ecuație a conservării impulsului, obținem

$$mv\sin\theta = \frac{h\nu'}{c}\sin\varphi = \frac{h}{c}\sin\varphi\frac{c}{\lambda}\frac{\sin\theta}{\sin(\varphi+\theta)} \tag{9}$$

sau

$$mv = \frac{h}{\lambda}\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}. \tag{10}$$

Ținînd seama și de ecuația energiei, obținem

$$h(\nu - \nu') = c^2(m - m_0). \tag{11}$$

Dar $m^2 = \frac{m_0^2c^2}{c^2 - v^2}$, sau $m^2c^2 - m_0^2c^2 = m^2v^2$. (12)

Ridicînd la pătrat relația energiei și procedînd ca în problema 4.5.16, se obține :

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi). \tag{13}$$

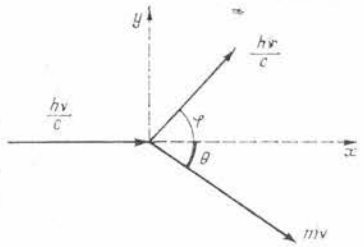


Fig. 4.5.17 R

În cazul de față

$$\lambda' = \lambda\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta} \tag{14}$$

deci

$$\Delta\lambda = \lambda\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta} - 1\right) = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi). \tag{15}$$

De aici

$$h = m_0c\,\lambda\frac{\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta} - 1}{1 - \cos\varphi} = 6{,}38\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \tag{16}$$

Eroarea este

$$\frac{6{,}62 - 6{,}38}{6{,}62} = 3{,}6\,\%. \tag{17}$$

4.5.18 Folosind rezultatele din problema precedentă, putem scrie

$$\Delta E = h\ (\nu - \nu') = mc^2 - m_0 c^2$$

relaţie din care putem afla direct energia primită de electron. Noi am obţinut relaţia

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}\ (1 - \cos\ \varphi)$$

de la care putem să ne întoarcem la frecvenţe şi deci la energii, scriind $\lambda = \frac{c}{\nu}$ şi deci

$$\frac{c}{h\nu'} - \frac{c}{h\nu} = \frac{1 - \cos\varphi}{m_0 c}$$

sau

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\varphi}{m_0 c^2}.$$

Pentru $\varphi = 60°$, vom avea

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1 - 0{,}5}{511\ \text{keV}}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}\cdot 3\cdot 10^8\ \text{m/s}}{0{,}497\cdot 10^{-10}\ \text{m}} = 4\cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

$1\ \text{MeV} = 10^6 \cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}$ şi rezultă

$$\frac{1}{E'} = \frac{10^{15}}{4\ \text{J}} + \frac{0{,}5\cdot 10^{13}}{0{,}5\cdot 1{,}6\ \text{J}}.$$

$$E' = \frac{4\cdot 160}{164}\cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

$$\Delta E = E - E' = 4\cdot 10^{-15}\left(1 - \frac{160}{164}\right)\text{J} \approx 10^{-14}\ \text{J}.$$

Pentru $\varphi = 90°$, $\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{m_0 c^2}$, de unde $\Delta E = E - E' \approx$

$$\approx 4\cdot 10^{-15}\ \text{J}\left(1 - \frac{20}{21}\right) = \frac{4}{21}\cdot 10^{-15}\ \text{J} \approx 1{,}9\cdot 10^{-16}\ \text{J}.$$

Pentru $\varphi = 180°$, $\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{2}{m_0 c^2}$ şi obţinem

$$\Delta E = E - E' = 4\cdot 10^{-15}\ \text{J}\left(1 - \frac{20}{22}\right) = \frac{4}{11}\cdot 10^{-15}\ \text{J} = 3{,}63\cdot 10^{-16}\ \text{J}.$$

4.5.19. Din egalizarea forţei lui Lorentz cu forţa centrifugă, obţinem $\frac{m v^2}{\rho} = evB$. De aici obţinem imediat impulsul particulei:

$$P = mv = eB\rho = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 0{,}5\ \text{T}\cdot 0{,}2\ \text{m} = 1{,}6\cdot 10^{-20}\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Energia se va calcula din relaţia relativistă

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},\ \text{unde}\ m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}.$$

Rezultă:

$$E = 3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{1{,}6^2\cdot 10^{-40} + (9{,}1\cdot 10^{-31})^2\cdot (3\cdot 10^8)^2}\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx$$

$$\approx 4{,}81\cdot 10^{-12}\ \text{J}.$$

4.5.20. Forţa electrică care acţionează asupra electronilor va fi $\vec{F}_e = -e\vec{E}$, iar forţa magnetică: $\vec{F}_m = -e\ (\vec{v} \times \vec{B})$, care trebuie să aibă orientarea din figură, pentru a compensa forţa electrică. Rezultă $evB = eE$, de unde $v = E/B$ (condiţia de filtrare a fasciculului după viteze, sau de monocromaticitate).

Energia cinetică a electronilor a fost însă datorită cîmpului accelerator de 1 MeV, deci putem scrie

$$eU = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

sau $1\ \text{MeV} = 0{,}5\ \text{MeV}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$, de unde rezultă

$$v = 2{,}82\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Cîmpul electric dintre plăcile condensatorului are valoarea

$$E = \frac{U}{d} = \frac{10^4\ \text{V}}{5\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 2\cdot 10^5\ \text{V/m}.$$

Rezultă

$$B = \frac{E}{v} = \frac{2\cdot 10^5\ \text{V/m}}{2{,}82\cdot 10^8\ \text{m/s}} = 7{,}14\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\ \text{(sau tesla)}.$$

5.1.1. a) Dacă notăm cu V_A și V_B volumele celor două gaze aflate în aceleași condiții de temperatură și presiune și cu n_A și n_B respectiv numărul de molecule pe care îl conțin, rezultă că volumul revenind unei molecule este

$$v_A = \frac{V_A}{n_A},\quad v_B = \frac{V_B}{n_B}.$$

Cum $V_A = V_B$ prin ipoteză și $n_A = n_B$ conform legii lui Avogadro, rezultă $v_A = v_B$.

Volumul ocupat de un kilomol de gaz fiind produsul dintre numărul lui Avogadro și volumul unei molecule, rezultă imediat

$$\mathcal{N}\, v_A = \mathcal{N}\, v_B.$$

b) Volumul ocupat de un kilomol este raportul dintre masa unui kilomol $M = n\cdot m_H$ (unde n reprezintă numărul de atomi din moleculă) și densitatea sa ρ

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{n\cdot m_H}{\rho}.$$

Densitatea relativă a unui gaz se definește ca raportul dintre densitatea gazului considerat și densitatea aerului ρ_a în condiții normale

$$d = \frac{\rho}{\rho_a},\quad \rho = d\cdot \rho_a$$

deci

$$V = \frac{n\cdot m_H}{d\cdot \rho_a} \approx \frac{2\cdot 1{,}008}{0{,}0695\cdot 1{,}293} \approx 22{,}414\ \text{m}^3.$$

c) $\mathcal{N}_L = \dfrac{6{,}022\cdot 10^{26}}{22{,}414} \approx 2{,}69\cdot 10^{25}$.

5.1.2. Numărul de celule elementare

$$n_{celule} = \frac{1}{l^3} = \frac{10^{30}}{175{,}616}\ \text{m}^3.$$

Suma maselor unui ion de clor și sodiu este deci

$$m_{Cl} + m_{Na} = \frac{d}{4\, n_{celule}}.$$

Masa unui kilomol de clorură de sodiu fiind 58,5 kg

$$\mathcal{N} = \frac{M}{m_{Cl} + m_{Na}} = \frac{4\, M\cdot n_{celule}}{d} \approx 6\cdot 10^{26}\ \text{molecule/kmol}.$$

5.1.3. a) Izotopul $^{35}_{17}\text{Cl}$ are $n_e = n_p = Z = 17$

$$n_n = A - Z = 18$$

Izotopul $^{37}_{17}\text{Cl}$ are $n_e = n_p = Z = 17$

$$n_n = A - Z = 20$$

b) Se rezolvă sistemul

$$35x + 37y = 35{,}457$$

$$x + y = 1$$

și se găsește că izotopul $^{35}_{17}\text{Cl}$ este în proporție de 77,15 % și izotopul $^{37}_{17}\text{Cl}$ este în proporție de 22,85 %.

c) Sînt 4 varietăți de molecule de HCl.

5.2.1. a) Asupra particulei de ulei acționează următoarele forțe:

— greutatea aparentă $\vec{G}_{ap}$ fiind diferența dintre forța de greutate a particulei și forța lui Arhimede, forță care este constantă,

— forța electrică $\vec{F}_e = q\cdot \vec{E}$ care își schimbă semnul odată cu sensul de mișcare al particulei,

— forţa de frecare a particulei de ulei cu aerul, totdeauna în sens contrar sensului de mişcare al particulei $\vec{f} = -6\pi \cdot \eta \vec{v} \cdot r$, unde am notat cu η coeficientul de vîscozitate al aerului şi cu $\vec{v}$ viteza constantă a particulei de ulei de rază r.

Viteza particulei de ulei fiind constantă în timpul experienţei rezultă că suma forţelor care acţionează asupra particulei la urcare şi coborîre va fi nulă, respectiv

$$G_{ap} - F_e - f_1 = 0 \tag{1}$$

$$G_{ap} + F_e - f_2 = 0. \tag{2}$$

(b) Din expresiile (1) şi (2) rezultă imediat prin adunare şi scădere

$$2G_{ap} = f_2 - f_1 \tag{3}$$

$$2\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_u - \rho_a) g = 6\pi \cdot \eta \cdot v (v_2 - v_1) r \tag{4}$$

unde am notat cu ρ_u densitatea picăturii de ulei şi cu ρ_a densitatea aerului

$$2F_e = f_1 + f_2 \tag{5}$$

$$2qE = 6\pi \cdot \eta (v_1 + v_2) r. \tag{6}$$

Din relaţiile (4) şi (6) deducem expresia

$$q = \frac{9\pi \eta^{3/2} d^{5/2}}{2\sqrt{(\rho_u - \rho_a) g}} \frac{1}{U}\left(\frac{1}{t_c} + \frac{1}{t_u}\right)\sqrt{\frac{1}{t_c} - \frac{1}{t_u}} =$$

$$= K\frac{1}{U}\left(\frac{1}{t_c} + \frac{1}{t_u}\right)\sqrt{\frac{1}{t_c} - \frac{1}{t_u}} \approx 8 \cdot 10^{-19}\ C \approx 5\, e.$$

5.3.1. Electronii pot trece prin diafragma D_3 dacă în momentul trecerii prin condensatorul C_1 cîmpul electric dintre armăturile

acestuia (respectiv tensiunea dintre plăcile sale) este nul. Dacă acest lucru se întîmplă, fasciculul de electroni va fi deviat de cîmpul electric al condensatorului C_2. Se reglează frecvenţa oscilatorului local care produce tensiunea de înaltă frecvenţă aplicată condensatorilor C_1 şi C_2 pînă cînd fasciculul de electroni ajunge nedeviat pe ecranul fluorescent al osciloscopului catodic. În acest caz putem scrie că timpul de parcurgere al spaţiului C_1C_2 este egal cu un multiplu întreg (n) al jumătăţii perioadei tensiunii de înaltă frecvenţă şi deci

$$t = \frac{d}{v} = \frac{n T_n}{2} = \frac{n}{2\nu_n} = \frac{1}{2\nu_1}; \tag{1}$$

$$v_1 = 2\nu_1 \cdot d = 18\,400 \text{ km/s} \tag{2}$$

$$\frac{m v^2}{2} = e \cdot U_a \tag{3}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U_a} = \frac{2\nu_1^2 d^2}{U_a} = 1{,}6928 \cdot 10^{11}\ \text{C/kg}. \tag{4}$$

Observaţie. Datorită vitezei mari a electronilor se pot aplica corecţiile relativiste, care însă rămîn în limitele de erori ale experienţei.

5.3.2. a) Mişcarea după axa Ox este rectilinie şi uniformă

$$x = v_0 t. \tag{1}$$

Mişcarea după Oy este uniform accelerată

$$ma = eE \tag{2}$$

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e}{m} Et^2 = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{1}{v_0^2} x^2 \tag{3}$$

care este expresia unei parabole cu vîrful în originea axelor.

b) La ieşirea din condensator $x = l$, iar condiţia ca fasciculul de electroni să poată ieşi din condensator este

$$y \leqslant \frac{d}{2} \tag{4}$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{1}{v_0^2} \leqslant \frac{d}{2} \tag{5}$$

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{e}{m}\frac{U}{d}l^2} = 1455 \text{ km/s}. \tag{6}$$

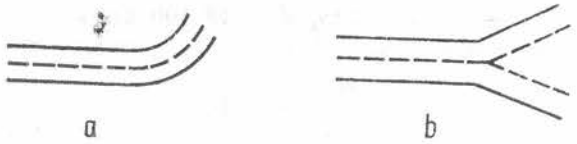


Fig. 5.3.2. R

c) se poate obţine o posibilitate de creştere a deviaţiei fasciculului electronic printr-o uşoară deformare a extremităţii condensatorului plan [fig. 5.3.2 R, a, deviaţia în sus, fig. 5.3.2R, b, pentru ambele tipuri de deviaţie].

5.3.3. a) $$y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{E}{v_0^2}x^2. \tag{1}$$

Din egalitatea energiei cinetice a electronului cu expresia energiei cîştigate în cîmpul electric vom calcula viteza iniţială v_0 cu care electronul intră în condensator

$$v_0 = \sqrt{2\frac{e}{m}U_a} \tag{2}$$

$$y = \frac{1}{4}\frac{E}{U_a}x^2 \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{E}{U_a}x. \tag{4}$$

Micile deviaţii ale fasciculului de electroni la ieşirea din condensator se vor aproxima după relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\frac{E}{U_a}l = 0{,}125 \ll 1, \text{ deci } \alpha \approx 0{,}125 \text{ rad}.$$

b) Din geometria analitică se ştie că ecuaţia unei drepte de pantă cunoscută este

$$Y - y = \operatorname{tg}\alpha\,(X - x). \tag{6}$$

Pentru $x = l$ avem $y = \frac{1}{4}\frac{E}{U_a}l^2$ şi deci

$$Y - \frac{1}{4}\frac{E}{U_a}l^2 = \frac{1}{2}\frac{E}{U_a}l(X - l). \tag{7}$$

Pentru a găsi punctul virtual din care pare să provină acest fascicul vom face $y = 0$ şi rezultă

$$x = \frac{l}{2} = 2{,}5 \text{ cm}. \tag{8}$$

c) Deviaţia pe ecranul de observaţie se va calcula după relaţia

$$\delta = \left(10\,l + \frac{l}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{4}\frac{E}{U_a}l^2 \approx 6{,}56 \text{ cm}.$$

5.4.1. $$OA = 2R\cos\alpha$$

$$AB = OB - OA = 2R\,(1 - \cos\alpha) =$$

$$4R\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx R\cdot\alpha^2 = 7{,}5\ \mu\text{m}.$$

5.4.2. a) $v = \sqrt{2\frac{e}{m}U} \simeq 2{,}63 \cdot 10^7$ m/s

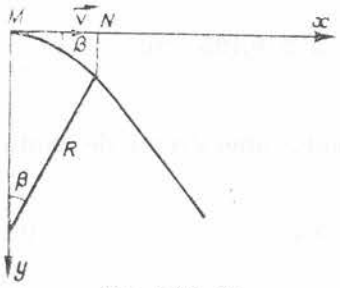


Fig. 5.4.2. R

$$R = \frac{mv}{eB} \approx 30{,}94 \text{ mm}$$

b) $$F_c = \frac{mv^2}{R} = 2{,}03 \cdot 10^{-14} \text{ N}$$

c) $$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m}B = 135{,}3 \text{ MHz}$$

d) $$\sin \beta = \frac{MN}{R} = MN\frac{eB}{mv} = 0{,}323$$

$$\beta \approx 18°51'.$$

5.4.3. a) Se descompune viteza inițială a electronului după componentele pe cele 2 axe

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha.$$

După Ox avem o mișcare rectilinie uniformă și deci

$$MN = v_x \cdot T = v \cos \alpha \cdot T.$$

Asupra componentei perpendiculare v_y se exercită de cîmpul magnetic exterior forța magnetică $F = ev_y B$. Deci raza de curbură a mișcării circulare după Oy este

$$R = \frac{1}{e/m}\frac{1}{B} v \sin \alpha$$

și perioada de rotație

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin\alpha} = 2\pi \frac{1}{e/m}\frac{1}{B} \approx 3{,}69 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 36{,}9 \text{ ns}$$

este independentă de unghiul sub care intră electronul în cîmpul B.

b) Din egalitatea energiilor se determină: viteza electronilor v în funcție de tensiunea acceleratoare U_a

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m}U_a} = 16\,200 \text{ km/s}.$$

Din relațiile (2), (4) și (5) deducem

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U_a}{B^2 \cdot MN}\cos^2 \alpha \approx 1{,}7 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}.$$

c) Montajul experimental se realizează prin montarea unui tub catodic în interiorul unei bobine suficient de lungi, axa tubului fiind paralelă cu axa bobinei. Se variază cu ajutorul unui reostat intensitatea curentului din bobina exterioară, deci și cîmpul B, pînă cînd se realizează o focalizare a fasciculului electronic în centrul ecranului tubului catodic, pentru cea mai mică valoare a inducției B, pentru care focalizarea mai este posibilă; în acest caz, se poate afla e/m cu formula indicată, MN fiind egală cu lungimea tubului catodic.

5.4.4. Se determină numărul de electroni n transportați de fascicul în timpul t

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{1{,}6}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 10^{19} \text{ electroni.} \tag{1}$$

Se determină viteza acestor electroni din egalarea energiei cinetice totale a acestora cu cantitatea de căldură măsurată

$$n\frac{mv^2}{2} = W. \tag{2}$$

Deci viteza electronilor se calculează din relația

$$v = \sqrt{\frac{2We}{mQ}}. \tag{3}$$

Sarcina specifică e/m se determină din egalarea forței centrifuge cu forța magnetică și din relația (3) obținem

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{B^2 r^2}\frac{2W}{Q} = 1{,}7 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}. \tag{4}$$

Cu această valoare se poate calcula viteza electronilor din (3) care se găsește aproximativ 1000 km/s.

5.4.5. a) Deviația ionilor în cîmpul electric se obține considerînd că mișcarea rezultantă se descompune în o mișcare rectilinie și uniformă $x = v_0 t$ în lungul axei Ox și o mișcare rectilinie uniform

accelerată $y = \frac{a \cdot t^2}{2}$ după axa Oy. Considerînd forța electrică $\vec{F}_e$ dirijată în lungul lui Oy

$$F_e = m \cdot a_y = q \cdot E \qquad \text{deci} \qquad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m} \cdot E \cdot t^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E}{v_0^2} \cdot x^2.$$

Deviația produsă în zona de acțiune l a cîmpului electric uniform (considerată egală cu lungimea plăcilor condensatorului plan) este

$$\delta_{e1} = \frac{q}{2m} \cdot \frac{E}{v_0^2} \cdot l^2.$$

Deviația δ_{e2} a fasciculului de ioni de la punctul de ieșire din condensator pînă la ecranul de observație (placă fotografică) este

$$\delta_{e2} = D \cdot \operatorname{tg} \alpha = D \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = \frac{q}{m}\frac{E}{v_0^2} \cdot lD.$$

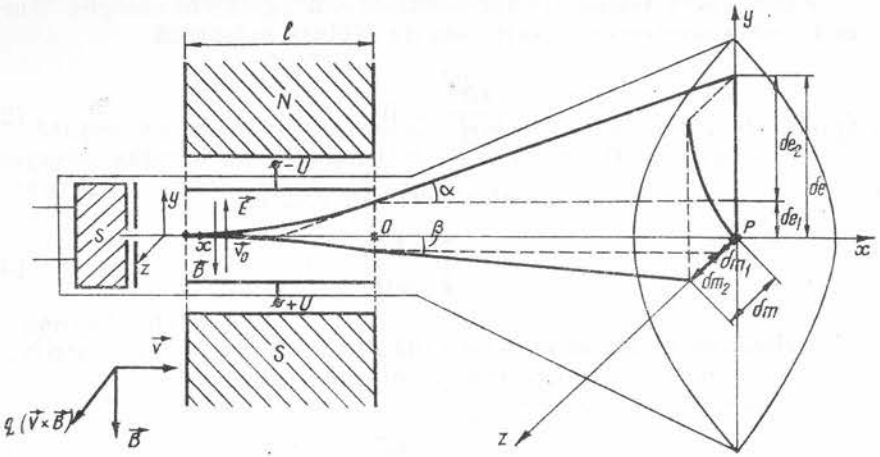


Fig. 5.4.5. R

Deci deviația totală δ_e produsă de cîmpul electric este

$$\delta_e = \delta_{e1} + \delta_{e2} = \frac{q}{m}\frac{E}{v_0^2} \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + D\right).$$

În mod analog se calculează și deviația totală δ_m produsă de cîmpul magnetic. Forța magnetică $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = m\vec{a}_z$ acționează în lungul axei Oz și deci obținem expresia ecuației mișcării rectilinii uniform accelerate de-a lungul lui Oz

$$z = \frac{a_z t^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{q}{m} v_0 B t^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{B}{v_0} x^2.$$

Deci deviația produsă în zona de acțiune l a cîmpului magnetic uniform (considerată egală cu lungimea l a polilor) este

$$\delta_{m1} = z\Big|_{x=l} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{B}{v_0} l^2.$$

Deviația δ_{m2} a fasciculului de ioni de la punctul de ieșire din cîmpul magnetic uniform pînă la ecran (placa fotografică) este

$$\delta_{m2} = D \operatorname{tg} \beta = D \frac{dz}{dx} = \frac{q}{m}\frac{B}{v_0} l D.$$

Deviația totală δ_m produsă de cîmpul magnetic este

$$\delta_m = \delta_{m1} + \delta_{m2} = \frac{q}{m}\frac{B}{v_0} l \left(\frac{l}{2} + D\right).$$

Ecuațiile de mișcare ale ionilor din fascicul în zona de acțiune a celor două cîmpuri uniforme și constante în timp sînt

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m} E t^2, \quad z = \frac{1}{2}\frac{q}{m} v_0 B t^2.$$

b) În expresia deviațiilor δ_e și δ_m vom introduce notația $D + \frac{l}{2} = L$

$$\frac{\delta_e}{\delta_m^2} = \frac{m E}{q B^2 l L} = \frac{y}{z^2}.$$

Se observă că pentru o geometrie a experienței dată și cîmpuri constante în timp obținem expresia $y = kz^2$, care este ecuația unei parabole în planul yOz cu vîrful în originea axelor de coordonate. Pentru diferite viteze inițiale ale ionilor $v_0 > 0$, se obține pe un ecran (sau placă fotografică) un arc de parabolă.

Aceste calcule sînt valabile pentru aproximația clasică a problemei, adică pentru cazul ionilor atrași de către o tensiune de accelerare pînă la ordinul sutelor de kilovolți.

5.4.6. a) Fasciculul de ioni rămîne nedeviat cînd forța electrică care acționează asupra fasciculului este egală cu forța Lorentz

$$qE = qvB.$$

În acest caz viteza fasciculului de ioni monoenergetici este dată de relația

$$v = \frac{E}{B} = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Aceeași concluzie se poate obține și prin egalarea expresiilor deviațiilor $\delta_c = \delta_m$, calculate în problema 5.4.5.

b) Sarcina specifică a ionilor se poate deduce din relația

$$\frac{mv^2}{2} = qU$$

adică ionii primesc energie cinetică numai în cîmpul electric produs de potențialul de accelerare U

$$\frac{q}{m} = \frac{v^2}{2U} = \frac{1}{2U}\frac{E^2}{B} = 9{,}57 \cdot 10^7 \text{ C/kg}.$$

c) Cîmpul electric uniform produce o deviație α dirijată după Oy. Ecuațiile de mișcare a ionilor după Ox și Oy sînt

$$x = vt, \qquad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E}{v^2}x^2.$$

Micile deviații se pot calcula astfel

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = \frac{q}{m}\frac{E}{v^2}l, \qquad \alpha \approx \frac{l}{r_e}.$$

Deci curbura produsă de cîmpul electric este

$$\rho_e = \frac{1}{r_e} = \frac{\alpha}{l} = \frac{q}{m}\frac{1}{v^2}E. \tag{9}$$

Curbura în cîmpul magnetic este

$$\rho_m = \frac{1}{r_m} = \frac{q}{m}\frac{1}{v}B. \tag{10}$$

În concluzie, ambele curburi depind direct proporțional de intensitatea cîmpurilor respective. Deviația fasciculului de ioni este nulă atunci cînd viteza lor $v = \frac{E}{B} = 400$ km/s. Pentru un raport $\frac{E}{B}$ constant avem următoarele cazuri:

— cazul $v < 400$ km/s. În acest caz $\rho_e > \rho_m$ adică predomină curbura dată de cîmpul magnetic;

— cazul $v > 400$ km/s. În acest caz $\rho_m > \rho_e$ adică predomină curbura dată de cîmpul magnetic.

5.4.7. Pentru a calcula valoarea lui K cu ajutorul valorilor experimentale vom reprezenta grafic $I_a = f\ (U_a^{3/2})$ cu ajutorul datelor calculate prin logaritmi:

U_a (V)	10	20	30	40	50	60	70	80
U_a 3/2	31,62	89,44	164,32	252,98	353,55	464,50	586,60	715,56

U_a (V)	90	100	110	120	130	140	150
U_a 3/2	853,74	10^3	1153,50	1314	1482	1655	1837

Din fig. 5.4.7. R deducem valoarea lui K care este dată de panta dreptei: $K = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ A \cdot V^{-3/2}$ și introducînd în relația (2) obținem $\frac{e}{m} = 1{,}7 \cdot 10^{11}$ C/kg.

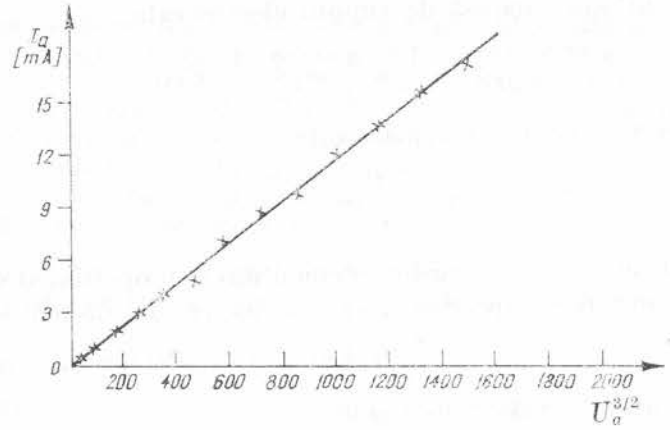


Fig. 5.4.7. R

5.5.1. a) Particula α se mișcă după o hiperbolă avînd drept axe de simetrie axele de coordonate. Utilizînd deci notațiile din fig. 5.5.1, traiectoria particulei se va scrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{unde} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

b) La distanțe mari față de nucleul difuzat particula α se va mișca după dreapta asimtotică BB' de ecuație

$$y = -\frac{b}{a}x = -x\,\mathrm{tg}\theta.$$

Din figură se observă însă că $\Phi = \pi - 2\theta$ și deci

$$y = -x\,\mathrm{cotg}\frac{\Phi}{2}$$

c) Vom scrie legea conservării energiei pentru cazul cînd particula α este suficient de depărtată de nucleu pentru ca energia sa potențială să fie neglijată și cazul cînd particula α se află în punctul D

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{c+a}$$

unde M este masa particulei;

$$1 = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \frac{Ze^2}{\pi\,\varepsilon_0\,MV_0^2}\,\frac{1}{c+a} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \frac{K}{c+a}$$

unde s-a notat $K = \dfrac{Ze^2}{\pi\,\varepsilon_0\,MV^2}$;

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1 - \frac{K}{c+a}, \quad c + a = c\left(1 + \frac{a}{c}\right) = c\,(1 + \cos\,\theta), \quad \sin\,\theta =$$

$$= \frac{p}{c}, \quad c + a = p\,\frac{1+\cos\,\theta}{\sin\,\theta} = p\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}, \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1 - \frac{K}{p}\,\frac{\sin\,\theta}{1+\cos\,\theta}.$$

d) Aplicăm legea de conservare a momentului cinetic

$$MV_0\,p = MV\,(c + a)$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p}{c+a} = \frac{p}{p\,\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\,\theta}} = \frac{\sin\,\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$1 - \frac{K}{p}\,\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{K}{p}\,\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 1 - \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$p = K\,\frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{K}{2}\operatorname{tg}\theta = \frac{K}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\Phi}{2} = \frac{K}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Phi}{2}.$$

e) $$V_0 = \sqrt{\frac{2W}{M_\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}{6{,}695\cdot 10^{-27}}} = 2{,}18\cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$V = V_0\,\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{V_0}{2+\sqrt{3}} = \frac{2{,}18}{2+\sqrt{3}}\cdot 10^7 \text{ m/s} = 5{,}84\cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$\Phi = 180^\circ - 2\,\theta = 120^\circ$$

$$p = \frac{K}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Phi}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 MV^2}\operatorname{cotg}\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Ze^2}{MV^2}\operatorname{cotg} 60^\circ$$

$$p = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 79\,(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{6{,}69\cdot 10^{-27}(5{,}84\cdot 10^6)^2}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 9{,}20\cdot 10^{-14} \text{ m} = 9{,}20\cdot 10^{-4} \text{ Å}.$$

5.5.2. a) Probabilitatea P ca o particulă α să treacă pînă la o distanță p față de un nucleu difuzant al foiței este proporțională cu suprafața circulară πp^2, cu n și cu d, adică

$$P = \pi p^2 nd \text{ și cum } p = \frac{K}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Phi}{2} \text{ obținem } P = \frac{\pi K^2 nd}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\Phi}{2}.$$

Probabilitatea elementară dP ca o particulă α să fie difuzată sub un unghi $\Phi \in [\Phi,\ \Phi + d\Phi]$ (egală cu probabilitatea ca particula să treacă la o distanță $p \in [p,\ p+dp]$ față de un nucleu oarecare al foiței)* este dată de

$$dP = \frac{dP}{d\Phi}\,d\Phi = -\frac{\pi K^2 nd}{4}\operatorname{cotg}\frac{\Phi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\Phi}{2}\,d\Phi =$$

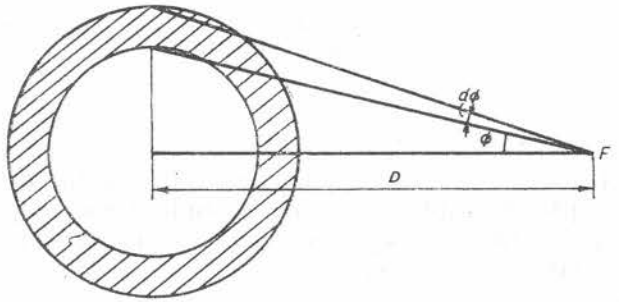
$$= -\frac{\pi K^2 nd}{4}\cos\frac{\Phi}{2}\operatorname{cosec}^3\frac{\Phi}{2}\,d\Phi.$$

Dar $\sin\Phi\operatorname{cosec}\frac{\Phi}{2} = 2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Phi}{2} = 2\cos\frac{\Phi}{2}$ și deci

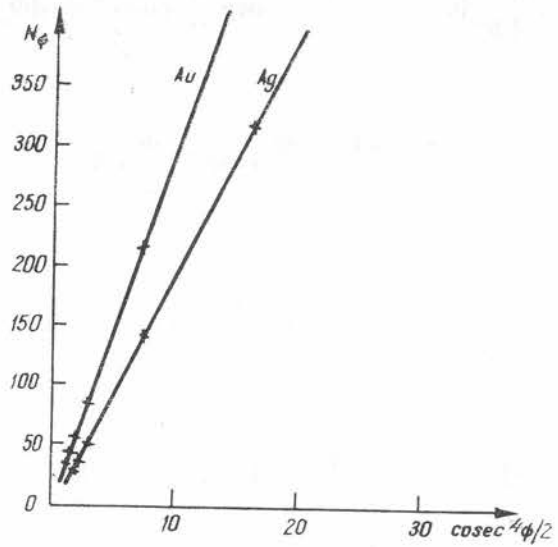
$$dP = -\frac{\pi K^2 nd}{8}\sin\Phi\operatorname{cosec}^4\frac{\Phi}{2}\,d\Phi.$$

* $dp > 0$, impune $d\Phi < 0$.

Considerînd o coroană circulară elementară a ecranului de SZn de suprafaţă $dS = -2\pi D \sin\Phi \cdot D\, d\Phi = -2\pi D^2 \sin\Phi\, d\Phi$ fracţiunea de particule α difuzate care cad pe unitatea de suprafaţă al ecranului la distanţa D faţă de foiţă este $\frac{dP}{dS} = \frac{\pi K^2 n d}{16\, D^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}$ (fig. 5.5.2 R, a).



a



b

Fig. 5.5.2. R

Deci numărul de particule α difuzate pe unitatea de ecran de SZn la distanţa D faţă de foiţă şi la un unghi de deviaţie Φ este

$$N_\Phi = N \frac{dP}{d\Phi} = \frac{\pi K^2 N n d}{16\, D^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}.$$

b) Pentru a face reprezentarea grafică $N_\Phi = f\left(\operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}\right)$ vom calcula

Φ	150°	135°	120°	105°	75	60°	45°	30°	15°
$\operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}$	1,15	1,38	1,78	2,53	7,25	16	46,6	223	3445

În reprezentarea grafică (figura b) se observă că se obţine o dependenţă liniară de $\operatorname{cosec}^4 \frac{\Phi}{2}$ pentru foiţe subţiri de Au şi Ag, obţinîndu-se astfel o concordanţă între teorie şi măsurătorile experimentale.

5.6.1. $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (v. fig. 5.6.1 R).

Seria Lyman

$$m = 1;\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 8225818{,}5\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 1{,}215 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 1215\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right) = 10967758\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 9{,}12 \cdot 10^{-8}\ \text{m} = 912\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = 2741939{,}5\ \text{m}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 303\ \text{Å}$$

Seria Balmer

$$m = 2\,;\; n = 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 1523299{,}72\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\lambda_1 = 6{,}565\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 6565\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty}\right) = 2743879\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\lambda_2 = 3{,}644\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 3644\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1} = 1220579{,}28\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 2920\ \text{Å}.$$

Seria Paschen

$$m = 3\,;\; n = 4,\ 5,\ 6,\ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right) = 533085{,}46\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\lambda_1 = 1{,}8758\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 18758\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty}\right) = 1218639{,}77\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\lambda_2 = 8{,}205\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 8205\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 685554{,}31\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 10553\ \text{Å}.$$

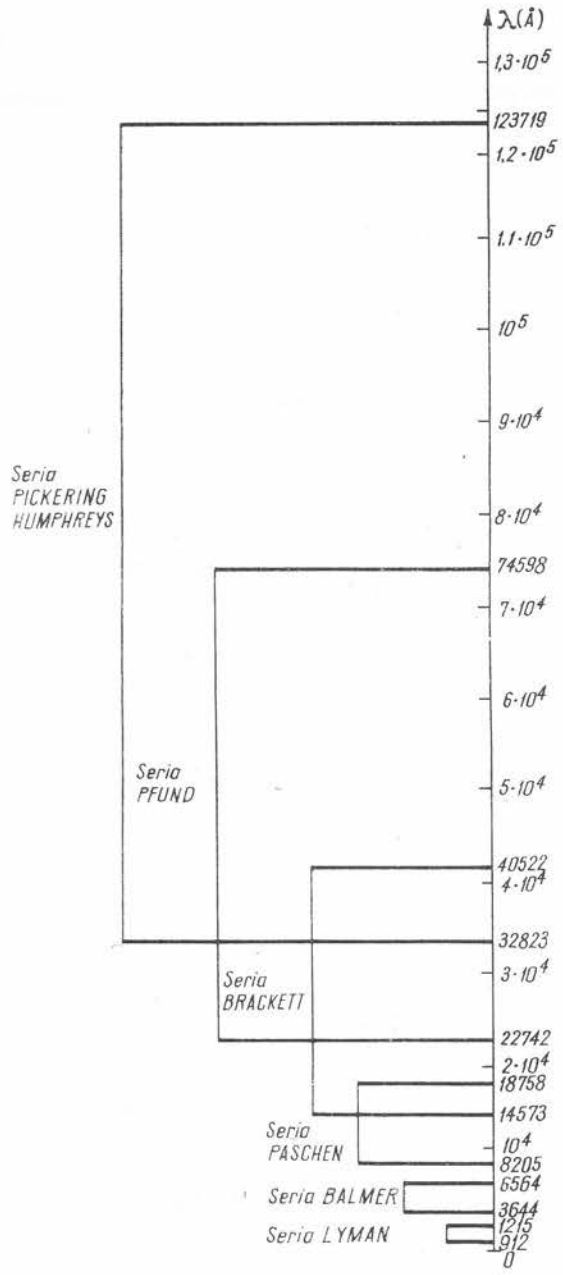


Fig. 5.6.1. R

Seria Brackett

$$m = 4;\ n = 5,\ 6,\ 7,\ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 246774{,}55$$

$$\lambda_1 = 4{,}0522 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 40522\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{\infty}\right) = 685484{,}87\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 1{,}4573 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 14573\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 438710{,}32\ \text{m}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = 25949\ \text{Å}.$$

Seria Pfund

$$m = 5;\ n = 5,\ 6,\ 7,\ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2}\right) = 134050{,}38\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 7{,}4598 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 74598\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{\infty}\right) = 439710{,}32\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 2{,}2742 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 22742\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 305659{,}94\ \text{m}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = 51856\ \text{Å}.$$

Seria Pickering-Humphreys

$$m = 6;\ n = 7,\ 8,\ 9,\ldots$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10967758\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2}\right) = 80828{,}15\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 1{,}23719 \cdot 10^{-5}\ \text{m} = 123719\ \text{Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 10967758\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{\infty}\right) = 304659{,}94\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 3{,}2823 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 32823\ \text{Å}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 223831{,}79\ \text{cm}^{-1}$$

$$\Delta\lambda = 90896\ \text{Å}.$$

5.6.2. a) Formulele care au fost stabilite pentru prismă (V. cap. 1) sînt

$$\sin i = n \sin r,\ \sin i' = n \sin r'$$

$$A = r + r',\ D = i + i' - A.$$

Dacă i = constant şi $n = n(\lambda)$ este variabil obţinem prin diferenţiere

$$0 = n \cos r\ \mathrm{d}r + \mathrm{d}n \sin r,\ \cos i'\ \mathrm{d}i' = n \cos r'\ \mathrm{d}r' + \mathrm{d}n \sin r'$$

$$0 = \mathrm{d}r + \mathrm{d}r',\ \mathrm{d}D = \mathrm{d}i'.$$

Prin calcule algebrice se ajunge la relaţia

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n} = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}.$$

Prisma aflîndu-se în poziția de minim de deviație vom utiliza relațiile

$$D_m = 2i_m - A,\ r = r' = \frac{A}{2} \text{ deci } i = i'$$

$$\frac{dD}{dn} \approx \frac{\Delta D}{\Delta n} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos i'} = \frac{2 \frac{\sin i_m}{n}}{\cos i_m} = \frac{2}{n} \operatorname{tg} i_m$$

$$\Delta D = 2 \operatorname{tg} i_m \cdot \frac{\Delta n}{n}.$$

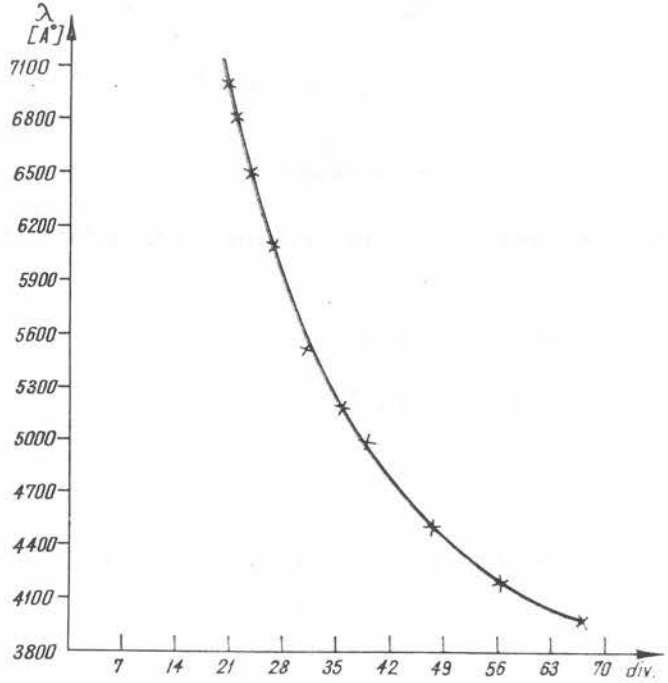


Fig. 5.6.2. R

b) Dacă se notează cu f_c distanța focală a colimatorului și cu F_{ob} distanța focală a obiectivului, distanța dintre două linii spectrale este $d = F_{ob} \cdot \Delta D$.

Dacă a este deschiderea diafragmei rectangulare și a' imaginea ei rezultă că $a' = a \frac{F_{ob}}{f_c}$. Condiția de separare a două linii spectrale apropiate este $F_{ob} \cdot \Delta D \geqslant a \frac{F_{ob}}{f_c}$ și la limită $\Delta D = \frac{a}{f_c}$.

$$f_c = \frac{a}{\Delta D} = \frac{an}{2 \operatorname{tg} i_m \cdot \Delta n} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}6236}{2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 10^{-5}} = 1{,}59 \text{ m}.$$

c) și d) Cu ajutorul curbei de dispersie din fig. 5.6.2.R, găsim

$$x_1 = 23{,}1 \qquad \lambda_\alpha = 6560 \text{ Å}$$
$$x_2 = 41 \qquad \lambda_\beta = 4850 \text{ Å}$$
$$x_3 = 51{,}8 \qquad \lambda_\gamma = 4360 \text{ Å}$$
$$x_4 = 60{,}2 \qquad \lambda_\delta = 4100 \text{ Å}.$$

5.6.3. a) $B = \lambda_\alpha \frac{n^2 - 2^2}{n^2} = 6565 \frac{9-4}{9} 10^{-10} = 3647{,}2 \cdot 10^{-10} \text{ m} =$

$= 3647{,}2$ Å.

b) $\lambda_\gamma = 3647{,}2 \frac{25}{25-4} = 4342$ Å.

c) $\tilde{\nu}_\beta = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)$, $\tilde{\nu}_\delta = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right)$.

Numărul de undă a celei de a doua linii din seria Brackett se găsește cu ajutorul principiului de combinație a termenilor spectrali

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \tilde{\nu}_\delta - \tilde{\nu}_\beta$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_\delta} - \frac{1}{\lambda_\beta}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_\beta \lambda_\delta}{\lambda_\beta - \lambda_\delta} = \frac{4863 \cdot 4100}{760} = 26218{,}4 \text{ Å}$$

linie situată în domeniul I.R. al spectrului.

d) $\sin\ \theta = nk\lambda_\delta$

$$\cos\ \theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - (nk\lambda_\delta)^2} = 0{,}901.$$

e) Distanța liniară este $\delta x = f \cdot \delta\theta$

$$\cos\ \theta \cdot \mathrm{d}\theta = n\ k\ \mathrm{d}\lambda$$

$$\delta\theta = n\ k \frac{\delta\lambda}{\cos\ \theta}$$

$$\delta x = f\ n\ k \frac{\delta\lambda}{\cos\ \theta} = \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{6} \cdot 760 \cdot 10^{-10}}{0{,}901} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1{,}25\ \mathrm{cm}.$$

5.6.4. a) Seria Balmer a deuteriului are aceeași expresie ca și pentru hidrogen

$$\tilde{\nu} = R_D \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

linia	D_α	D_β	D_γ	D
λ (Å)	6563	4861	4341	4102
$\tilde{\nu}\ (\mathrm{m}^{-1}) \times 10^{-6}$	1,52370	2,05700	2,30384	2,43793

b) Capul seriei Lyman corespunde lui $n = 2$

$$\lambda_{12} = \frac{1}{R_D \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)} = \frac{4}{3} \frac{1}{R_D} = 1{,}2146 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 1214{,}6\ \text{Å}.$$

Limita seriei Lyman corespunde lui $n = \infty$

$$\lambda_{1\infty} = \frac{1}{R_D} = 0{,}91159 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 911{,}59\ \text{Å}.$$

c) $\sin\ \theta = nk\lambda_\alpha = 2 \cdot 10^5 \cdot 6653 \cdot 10^{-10} = 0{,}13306$; $\theta \approx 7°38'43''$.

Unghiul de observație maxim fiind $\theta_{max} = 90°$, pentru razele difractate

$$k = \frac{\sin\ \theta_{max}}{n\ \lambda_\alpha} = \frac{1}{n\ \lambda_\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 6653 \cdot 10^{-10}} = 7\ \text{maxime}.$$

Deci, teoretic se pot observa 7 maxime cu rețeaua considerată pentru $\lambda_\alpha = 6653$ Å.

d) Dispersia : $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{nk}{\cos\ \theta} \approx nk = 2000\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{mm}} = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3600}{10^7} = 41'' \cdot \text{Å}^{-1}$.

Distanța unghiulară : $\delta\theta = \frac{nk}{\cos\ \theta} \delta\lambda \approx nK\ \delta\lambda = 2000 \cdot 2304 \cdot 10^{-10} =$

$= 4{,}608 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{rad} = 4{,}608 \cdot \frac{180}{\pi}\ 3600 \cdot 10^{-4} = 95{,}1\ \text{secunde}$.

Distanța liniară : $\delta x = f \cdot \delta\theta = \frac{fnk}{\cos\ \theta} \delta\lambda = 1{,}2 \cdot 4{,}608 \cdot 10^{-4} =$

$= 5{,}53 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 0{,}553\ \mathrm{mm}$.

5.7.1. Întrucît configurația stabilă este de 8 electroni pe orbita exterioară izotopul $^{35}_{17}\mathrm{Cl}$ este monovalent (fig. 5.7.1R).

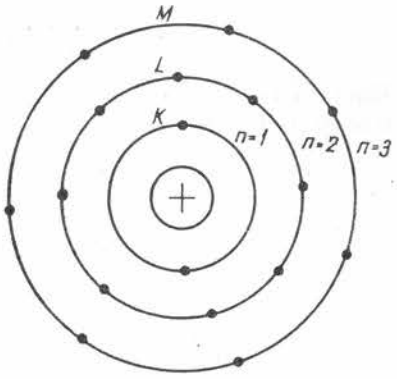


Fig. 5.7.1. R

5.7.2. a) Din postulatul I al lui Bohr deducem

$$p_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \qquad (1)$$

$$p_n = n \frac{h}{2\pi} \frac{1}{r_n}. \qquad (2)$$

Condiția de stabilitate a mișcării electronului pe o orbită circulară se obține din egalitatea forței centrifuge cu forța de atracție coulombiană

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \tag{3}$$

$$p_n^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{me^2}{r_n}. \tag{4}$$

Împărțim relația (4) la (2) obținem

$$p_n = \frac{1}{n}\frac{me^2}{2\varepsilon_0 h}. \tag{5}$$

Expresia energiei cinetice cuantificate a electronului este

$$W_c = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}. \tag{6}$$

Calculul energiei potențiale a electronului în cîmpul de forță centrală a nucleului se face ținînd seama că în acest caz forța derivă dintr-un potențial și deci

$$W_p = -\int F_n\,\mathrm{d}r_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{r_n}\frac{e^2}{r_n^2}\,\mathrm{d}r_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}. \tag{7}$$

Din (2), (5) și (7) deducem

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi me^2}{n^2\varepsilon_0 h^2}\right) = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^2}. \tag{8}$$

Energia totală a electronului pe orbită W_n fiind suma energiei cinetice și potențiale

$$W_n = W_c + W_p = \frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} - \frac{1}{n^2}\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}. \tag{9}$$

b) $W_c = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 2{,}16\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 13{,}5\ \mathrm{eV}$

$$W_p = -2W_c = -4{,}32\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -27\ \mathrm{eV}$$

$$W_n = -W_c = -2{,}16\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -13{,}5\ \mathrm{eV}.$$

c) Din relația (5) obținem

$$p_3 = \frac{1}{3}\frac{e^2 m}{2\varepsilon_0 h} = 6{,}9\cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}.$$

d) $\dfrac{W_2}{W_6} = \left(\dfrac{1/2}{1/6}\right)^2 = \dfrac{36}{4} = 9.$

5.7.3. $W_t = W_p + W_c$; $\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$

$$W_p = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad W_c = \frac{1}{2}mv^2 = +\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$W_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -E_c = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\oint mv^2\,\mathrm{d}t = nh,\ mv^2\frac{2\pi r}{v} = nh,\ mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

$$v = \frac{1}{mv}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi r}{nh}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{\varepsilon_0 hn}$$

$$W_n = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{8}\frac{Z^2me^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

a) $$-\frac{1}{8}\frac{Z^2me^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi Zme^2}n^2 = \frac{\frac{1}{36\pi}10^{-9}\,(6{,}6262\cdot 10^{-34})^2}{3{,}14\cdot 1\cdot 9{,}1095\cdot 10^{-31}(1{,}60219\cdot 10^{-19})^2}n^2 =$$

$$= 5{,}3150\cdot 10^{-11}\,n^2\ \mathrm{m}$$

$n = 1$; $r_1 = 0{,}5315\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}5315\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$

$n = 2$; $r_2 = 2{,}126\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$

$n = 3$; $r_3 = 4{,}7835\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$.

b) $$v = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{\varepsilon_0 h}\frac{1}{n}\frac{1}{2}\frac{1(1{,}60219\cdot10^{-19})^2}{\frac{1}{36\pi}10^{-9}\cdot 6{,}6262\cdot10^{-34}}\frac{1}{n} =$$

$$= 2{,}182\cdot10^6\frac{1}{n}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$n = 1;\quad v_1 = 2{,}182\cdot10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$n = 2;\quad v_2 = 1{,}091\cdot10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$n = 3;\quad v_3 = 0{,}727\cdot10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

5.7.4. $$E = \frac{F}{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}$$

$$r_n = n^2\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi e^2 m} = 0{,}53\cdot10^{-10}n^2$$

$$E = \frac{\pi m^2 e^5}{4h^4\varepsilon_0^3}\cdot\frac{1}{n^4}$$

$$E_1 = 51{,}2\cdot10^{10}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$E_2 = \frac{E_1}{16} = 3{,}2\cdot10^{10}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$E_3 = \frac{E_1}{81} = 0{,}63\cdot10^{10}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

5.7.6. a) Valoarea constantei lui Rydberg în ipoteza că masa nucleului atomului de hidrogen este mult mai mare decît masa electronului şi în consecinţă nucleul este în repaus

$$R_\infty = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2 c} = \frac{9{,}1095\cdot10^{-31}(1{,}60219\cdot10^{-19})^4}{8(6{,}6262\cdot10^{-34})^3(8{,}852\cdot10^{-12})^2 2{,}997925\cdot10^8} =$$

$$= 1{,}097373.10^7\ \mathrm{m^{-1}}.$$

b) În baza legii a 2-a a dinamicii aplicate mişcării a două particule (1 şi 2), avem : $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{21}$, $m_2\vec{a} = \vec{F}_{12}$, unde — în conformicu legea a 3-a a dinamicii — forţa F_{21} cu care particula 2 acţionează asupra primei particule, este egală cu $-\vec{F}_{12}$ ($\vec{F}_{12}$ fiind forţa corespunzînd acţiunii particulei 1 asupra particulei 2); obţinem expresia acceleraţiei relative a particulei 1 faţă de particula 2 ; $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}$, unde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

Rezultă că mişcarea relativă a unui ansamblu de două particule poate fi descrisă la fel ca mişcarea unei particule cu masa (redusă) $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ în acelaşi cîmp de forţe ($\vec{F}_{12}$).

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{e^4}{8h^3\varepsilon_0 c}\frac{mm_p}{m+m_p} = R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{m_p}}$$

$$R_{\mathrm{He}} = \frac{e^4}{8h^3\varepsilon_0 c}\frac{m m_{\mathrm{He}}}{m+m_{\mathrm{He}}} = R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{m_{\mathrm{He}}}} =$$

$$= R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{2(m_p+m_n)}} \approx R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{4m_p}}$$

$$R_\infty = R_{\mathrm{He}}\left(1+\frac{m}{4m_p}\right) = R_{\mathrm{H}}\left(1+\frac{m}{m_p}\right)$$

$$\frac{m_p}{m} = \frac{R_{\mathrm{H}} - \frac{1}{4}R_{\mathrm{He}}}{R_{\mathrm{He}} - R_{\mathrm{H}}} = 1839{,}97.$$

c) $$R_D = \frac{e^4}{8h^3\varepsilon_0 c}\frac{m m_D}{m_D+m} = R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{m_D}} = R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{(m_p+m_n)}} =$$

$$= R_\infty\frac{1}{1+\frac{91}{334753}} = 1{,}097074.10^7\ \mathrm{m^{-1}}.$$

5.7.7. a) Potenţialele de excitare corespund punctelor în care curba $I_a = f(U_{G_2})$ începe să scadă, adică corespunzătoare maximelor acestora. Explicaţia constă în faptul că în acel moment încep să

aibă loc ciocniri neelastice între electroni și atomi în spațiul G_1G_2, electronii cedînd o parte din energia lor cinetică atomilor de Hg, care devin astfel atomi excitați. Acești atomi revin apoi la starea normală prin emisia unei cuante (foton) de energie $h\nu$.

b) De pe curba din fig. 5.7.6R se găsesc tensiunile corespunzînd la 4,9 V și 9,8 V. Deci $U_{exc} = 4{,}9$ V.

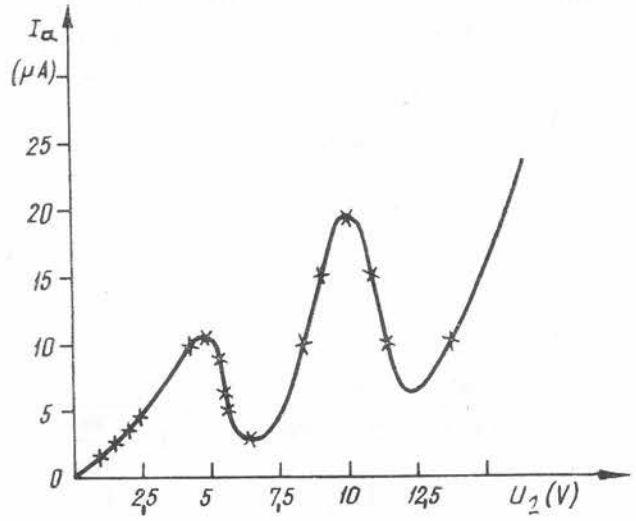


Fig. 5.7.6. R

Energia de excitare corespunzătoare este deci $W = 4{,}9$ eV $= 7{,}84 \cdot 10^{-19}$ J

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} = \frac{W - 0}{h} = \frac{W}{h} = 1{,}18429 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2533 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2533 \text{ Å}$$

adică se emite o radiație situată în domeniul *U.V.* al spectrului.

c) Energia de ionizare $W_i = eV_i$ corespunde diferenței dintre originea energiilor și energia nivelului fundamental. Termenul spectral corespunzător nivelului energiei de ionizare corespunde lui $n = \infty$, deci este nul.

Deci putem scrie relația

$eU_i = h \cdot c \cdot (T_0 - 0) = hcT_0$

$$T_0 = \frac{eU_i}{hc} = \frac{1{,}60219 \cdot 10^{-19} \cdot 10{,}38}{6{,}6262 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}997925 \cdot 10^8} = 8\,371\,958 \text{ m}^{-1}.$$

d) $eU_{exc} = hc\,(T_0 - T_1)$

$$T_1 = T_0 - \frac{eU_{exc}}{hc} = 8\,371\,958 - \frac{4{,}9 \cdot 1{,}60219 \cdot 10^{-19}}{6{,}6262 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}997925 \cdot 10^8} =$$

$$= 4\,419\,880 \text{ m}^{-1}.$$

5.8.1.* $$x = a \sin \omega t \tag{1}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t \tag{2}$$

$$p_x = mv_x = am\omega \cos \omega t. \tag{3}$$

Condiția de cuantificare a lui Sommerfeld (25′) se va scrie acest caz

$$\oint p_x \, dx = nh \text{ pentru } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{4}$$

$$\oint mv_x \, dx = m a^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = m a^2 \omega^2 \frac{T}{2} = nh \tag{5}$$

$$\nu = n \frac{h}{2\pi^2 ma^2} \tag{6}$$

$$W = (W_{cin})_{max} = \frac{m}{2} a^2 \omega^2 (\cos^2 \omega t)_{max} = \frac{ma^2 \omega^2}{2} = 2\pi^2 ma^2 \nu^2 = nh\nu. \tag{7}$$

Deci energia cuantificată a oscilatorului este un multiplu întreg de $h\nu$.

5.8.2.* $$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \tag{1}$$

$$\theta = \omega t \tag{2}$$

$$W_c = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2}; \tag{3}$$

22—c. 65

impulsul generalizat asociat variabilei θ este $\left(\text{prin comparație cu } p_x = \right.$

$$\left. = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{x}} = \frac{\left(\partial \frac{m\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv \right)$$

$$p_\theta = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta} = I\omega \tag{4}$$

$$\oint p_\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} I\omega d\theta = 2\pi \cdot I\omega = nh \tag{5}$$

$$\omega = \dot{\theta} = n\frac{h}{2\pi I} \tag{6}$$

$$W_c = \frac{I\omega^2}{2} = n^2 \frac{h^2}{8\pi^2 I} \quad \text{pentru } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{7}$$

5.8.3. *Pentru* $n = 1$ avem o singură valoare posibilă $n_\varphi = 1$, $\frac{a}{b} = 1$, deci $a = b$ și $\varepsilon = 0$, deci orbita este un cerc.

Pentru $n = 2$ avem două orbite posibile, pentru $n_\varphi = 1,2$

— pentru $n_\varphi = 1$ orbita este o elipsă cu $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $ba = 2$ și $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

— pentru $n_\varphi = 2$ avem din nou un cerc cu raza $a = b$ și $\varepsilon = 0$.

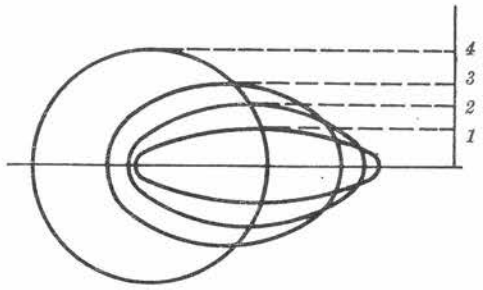


Fig. 5.8.3 R

Pentru $n = 3$ avem trei orbite posibile pentru $n_\varphi = 1, 2, 3$.

— pentru $n_\varphi = 1$ orbita este o elipsă cu $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, $ab = 3$ și $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

— pentru $n_\varphi = 2$ orbita este tot o elipsă cu $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}a$ și $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$

— pentru $n_\varphi = 3$ orbita este un cerc, cu raza $a = b$.

Pentru $n = 4$ (fig. 5. 8.3R) avem patru orbite posibile cu $n_\varphi = 1, 2, 3, 4$:

— pentru $n_\varphi = 1$ orbita este o elipsă cu $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$, $b = 4a$ și $\varepsilon = \frac{15}{16}$

— pentru $n_\varphi = 2$ orbita este o elipsă cu $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, $b = 2a$ și $\varepsilon = \frac{3}{4}$

— pentru $n_\varphi = 3$ orbita este tot o elipsă cu $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $b = \frac{4}{3}a$ și $\varepsilon = \frac{7}{16}$

— pentru $n_\varphi = 4$ orbita este un cerc cu raza $a = b$ și $\varepsilon = 0$.

5.9.1. a) Mișcarea electronului pe orbită duce la existența unui moment cinetic orbital $L = mvr = m\omega r^2$.

Mișcarea electronului în jurul nucleului echivalează cu un curent electric de intensitate $I = \nu e$. Acest curent echivalează cu o foiță magnetică (un magnet foarte plat) de moment $\mu = SI = \pi r^2 \cdot \nu e = \frac{e}{2m} m \cdot \omega \cdot r^2$. Deci: $\frac{\mu}{L} = \frac{e}{2m} = 0{,}85 \cdot 10^{11}$ C/kg.

b) Momentul cinetic orbital $\vec{L}$ este un vector perpendicular pe planul orbitei, sensul lui fiind dat de regula burghiului a lui Maxwell.

Datorită sarcinii electrice negative a electronului $\vec{\mu}$ are aceeași direcție cu $\vec{L}$, însă de sens contrar acestuia.

c) $$\frac{\text{pr } \vec{\mu}_s}{\text{pr } \vec{S}} = \frac{e}{m} = 1{,}7 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$$

$$\text{pr } \vec{\mu}_s = \frac{e}{m} \text{ pr } \vec{S} = m_s \frac{e}{m} \hbar = \pm \frac{he}{4\pi m} = \pm \mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T.}$$

d) $\mu_z = \frac{e}{2m} L_z = m_l \mu_B$.

Pentru $n = 4$ valorile posibile cuantificate sînt $\mu_z = 0, \pm \mu_B, \pm 2\,\mu_B, \pm 3\,\mu_B$, adică sînt $(2l + 1) = 7$ valori posibile.

5.10.1. a) În acest caz legea lui Moseley pentru linia K_α se scrie

$$\nu = Rc\,(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)}} + 1.$$

Calculele conduc la următoarele rezultate :

λ(Å)	Z calculat	Simbolul elementului din tabelul lui Mendeleev
8,364	13	Al
3,759	19	K
3,368	20	Ca
1,662	28	Ni
0,560	47	Ag

5.10.2. a) Legea lui Moseley pentru linia L_α se scrie

$$\nu = Rc\,(Z-b)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

$$b = Z - \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}} = 7{,}4569 \approx 7{,}5$$

b) $$Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}} + 7{,}5.$$

Rezultatele numerice sînt trecute în tabelul de mai jos :

λ(Å)	Z calculat	Simbolul elementului din tabelul lui Mendeleev
5,423	42	Mo
1,525	73	Ta
1,316	78	Pt
1,287	79	Au

5.10.4

	Linia K_α		Linia L_α	
Z	25	26	65	70
$\tilde{\nu}$ [m^{-1}]	$4{,}775 \cdot 10^9$	$5{,}184 \cdot 10^9$	$5{,}057 \cdot 10^9$	$5{,}982 \cdot 10^9$

5.10.5 a) Din fig. 5.10.5R se observă că $MPN \perp IR_1$ și IR_2, $PQ \perp IJ$ și $JN = JQ$. De asemenea : $IM = IQ$.

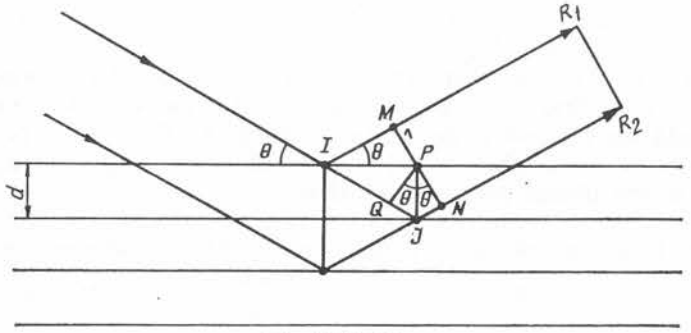


Fig. 5.10.5 R

Diferența de drum Δ dintre razele difractate IR_1 și IR_2 este $\Delta = IQJN - IM = QJN = 2 \cdot QJ = 2d \sin\ \theta$.

Condiția ca cele două raze IR_1 și IR_2 să fie în fază este ca diferența de drum Δ să fie un număr par de $\frac{\lambda}{2}$ și deci

$$2\ d\ \sin\ \theta = k\lambda^*.$$

b) $\sin\ \theta = \frac{k\lambda}{2d} = 0{,}592.$

c) Numărul total de maxime ce vor putea fi observate este 3.

5.11.1 Se aplică relațiile $\nu = \frac{c}{\lambda}$; $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$, $p = \frac{h}{\lambda}$; $\varepsilon = h\nu$.

5.11.2. Energia de repaus a neutronului : $W = 10^2\, m_n\, c^2 = 15{,}05 \cdot 10^{-9}$ J. Impulsul protonului : $p = \sqrt{\frac{W^2}{c^2} - m_p^2\, c^2} = 5{,}02 \cdot 10^{-17}$ kg·m·s^{-1}; $\lambda = \frac{h}{p} = 1{,}32 \cdot 10^{-17}$ m $= 1{,}32 \cdot 10^{-7}$ Å.

5.11.3. $2\pi r = n\,\lambda$, $\lambda = h/p$, $pr = mvr = n\hbar$.

5.11.4. $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{h}{\sqrt{2me}} \geqslant 2d \approx 6$ Å, $U \geqslant \frac{h^2}{8med^2} \approx 8$ V.

Proprietățile ondulatorii pot fi puse în evidență atunci cînd lungimea de undă asociată este, ca ordin de mărime, comparabilă cu o constantă de rețea a cristalului.

Deci pentru tensiuni $U \geqslant 8$ V pot fi puse în evidență proprietățile ondulatorii ale electronilor într-o experiență de tipul Davisson-Germer, cu ajutorul monocristalului considerat.

5.11.5. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot W_e}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-47}}} = 3{,}9 \cdot 10^{-11}\text{m} = 0{,}39\text{Å}$.

Cînd fasciculul de electroni trece prin obstacole (diafragme, rețele etc.) cu dimensiuni comparabile cu 0,39 Å, fasciculul trebuie tratat ca o undă cu lungimea de undă de 0,39 Å. Dacă însă trece prin deschideri de dimensiuni mult mai mari decît λ, putem aproxima că este constituit din particule clasice.

5.11.6. Punem condiția pentru primul maxim de difracție și calculăm lungimea de undă a fasciculului de lumină monocromatică

$$e\ \sin\ \varphi = \lambda;\ \lambda \approx e\,\varphi = 6 \cdot 10^{-6}\, \frac{0{,}2\,\pi}{180} = 0{,}209 \cdot 10^{-7}\text{m} = 209\ \text{Å}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3{,}17 \cdot 10^{-26}\ \text{kg·m·s}^{-1}.$$

5.11.7. $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2\,me\,U}}$

$2d\ \sin\ \theta = K\lambda = K\frac{h}{\sqrt{2m\,e\,U}}$; $\sin\ \theta_1 = 0{,}2267$; $\sin\ \theta_2 = 0{,}4534$.

Notă : pentru maximul de ordinul cinci și de ordine superioare acestuia rezultă $\sin\ \theta > 1$; deci rezultă din calcule că aceste maxime nu pot fi observate în condițiile prezentei experiențe.

5.11.8. $2d\ \sin\ \theta = K\frac{h}{\sqrt{2\,me\,U}}$

a) $\sin\ \theta_{Al} = 0{,}7024$; $\theta_{Al} \approx 44°40'$

$\sin\ \theta_{Ag} = 0{,}6945$; $\theta_{Ag} \approx 44°$

$\sin\ \theta_{Pt} = 0{,}5949$; $\theta_{Pt} \approx 36°30'$

$\sin\ \theta_{Fe} = 0{,}8091$ $\theta_{Fe} \approx 54°$

$\sin\ \theta_{Pb} = 0{,}5761$; $\theta_{Pb} \approx 35°10'$

b) $\frac{U_{Fe}}{U_{Pb}} = \left(\frac{d_{Pb}}{d_{Fe}}\right)^2 = 1{,}97.$

5.11.9. Se aplică legea conservării impulsului și energiei

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad W_1 + W_2 = W.$$

Din egalitatea impulsurilor $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$ rezultă că valoarea lungimii de undă asociată $\lambda = \frac{h}{p}$ pentru cele două fragmente nucleare este aceeași.

Se scrie energia relativistă pentru cele două fragmente nucleare

$$W_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2\, c^4$$

$$W_2^2 = p_2^2 c^2 + m_2^2\, c^4$$

și după calcule algebrice simple (v. probl. 4.5.6) se ajunge la

$$W_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2 = \frac{(6{,}25 + 36 - 10{,}24)\cdot 10^{-50}}{2\cdot 6\cdot 10^{-25}} \cdot 9\cdot 10^{16} =$$

$$= 2{,}4\cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{W_1^2 - m_1^2 c^4}{c^2}} = 2{,}7\cdot 10^{-17} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{h}{p_1} = 2{,}45\cdot 10^{-17}\text{m} = 2{,}45\cdot 10^{-7}\text{Å}.$$

5.12.1.*** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (1)

$$y(x,\ t) = f(x)\cdot g(t). \tag{2}$$

Înlocuind (2) în (1) obținem

$$gf'' = \frac{1}{u^2} f g'' \tag{3}$$

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{u^2}\frac{g''}{g}. \tag{4}$$

Membrul I din (4) este o funcție care depinde numai de x pe cînd membrul II este o funcție care depinde numai de timpul t. Ca această egalitate să poată exista între ele trebuie ca ambii membrii să fie egali cu o constantă pe care o vom nota cu $-K^2$

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{u^2}\frac{g''}{g} = -K^2. \tag{5}$$

Vor rezulta două ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, care vor fi rezolvate separat

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + K^2 f = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + K^2 u^2 g = 0. \tag{7}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (6) și (7) sînt de forma

$$f = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx,\ g = C_3 \sin Kut + C_4 \cos Kut. \tag{8}$$

Vom impune soluției (8) condițiile la limită, adică condițiile ca elongațiile y să fie nule la cele două extremități ale coardei (coarda fixată la ambele capete).

Pentru $x = 0$, condiția $y\,(0) = 0$ conduce la $C_2 = 0$.

Pentru $x = l$ condiția $y\,(l) = 0$ conduce la una din posibilități $C_1 = 0$, care nu poate fi admisă căci obținem o soluție identic nulă, sau $\sin Kl = 0$, adică $Kl = n\pi$ pentru $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Deci constanta K poate avea numai valorile discrete $K = n\dfrac{\pi}{l}$.

Soluția generală a ecuației (1) este deci de forma

$$y_n(x,t) = f(x)\cdot g(t) = C_1 \sin n\frac{\pi}{l}\left(C_3 \sin n\frac{\pi u}{l} t + \right.$$

$$\left. + C_4 \cos n\frac{\pi u}{l} t\right). \tag{10}$$

Vom considerea deci ca soluție generală a ecuației (1) expresia

$$y\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \sin n\frac{\pi}{l}\left(C_3 \sin n\frac{\pi u}{l} t + C_4 \cos n\frac{\pi u}{l} t\right).$$

Această soluție reprezintă forma unor unde staționare care iau naștere în coarda vibrantă, care au valori discrete, constantele C_1, C_2, C_3 urmînd a fi determinate din valorile inițiale, adică forma undei presupusă cunoscută la momentul $t = 0$.

Se poate defini o undă staționară ca acea undă care este descrisă printr-o funcție de undă cu variabile separabile dată de (10).

Pentru $n = 1$ punctele materiale ale corzii execută *vibrația fundamentală.*

Pentru $n = 2,\ 3,\ 4,\ldots$ se execută vibrații armonice: pentru $n = 2$ — armonica întîi, $n = 3$ armonica a doua etc.

5.12.2. ***

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{1}$$

$$\Psi (x,y,z,t) = \Psi_0 (x,y,z)\, e^{i\, 2\pi \nu} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} e^{i\, 2\pi\nu t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} e^{i\, 2\pi\nu t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} e^{i\, 2\pi\nu t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -\, 4\, \pi^2\, \nu^2\, \Psi_0\, e^{i 2\pi\nu t} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

deci înlocuind (3) în (1) obţinem

$$\Delta \Psi_0 = \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} \Psi_0 \tag{4}$$

unde notaţia $\Delta \Psi_0$ reprezintă suma celor trei derivate parţiale de ordinul doi. Această expresie este denumită în literatură „laplaceian".

Utilizînd relaţia (33) obţinem

$$\frac{\nu^2}{u^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2} \tag{5}$$

şi considerînd că energia cinetică $\frac{mv^2}{2}$ este diferenţa dintre energia

totală W şi energia potenţială U a unei microparticule descrise prin unda asociată Ψ obţinem

$$\frac{\nu^2}{u^2} = \frac{2\, m\, (W - U)}{h^2}$$

$$\Delta \Psi_0 (x,y,z) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - U)\, \Psi_0 (x,y,z) = 0.$$

b) Această demonstraţie nu este corectă din punctul de vedere al mecanicii cuantice. Falsitatea demonstraţiei rezultă din faptul că se consideră $W = T(p) + U(x, y, z)$, unde T este energia cinetică, care depinde de impulsul p şi U este energia potenţială, care depinde de coordonatele de poziţie x, y, z ale microparticulei. Din relaţiile lui Heisenberg rezultă însă că pentru o particulă cuantică o astfel de relaţie nu are sens, căci dacă impulsul p este bine determinat, poziţia x, y, z este nedeterminată şi reciproc.

5.12.3.***

$$U = -\int F\, dr = \int \frac{Z\, e^2}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, r^2}\, dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z\, e^2}{r}$$

din (34) avem imediat

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi m^2}{h^2} \left(W + \frac{Z\, e^2}{4\, \pi\, \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \right) \Psi = 0$$

5.12.4. a) Un singur electron.

b) Doi electroni.

c) $2(2l + 1)$.

d) $2 \sum_{l=0}^{n-1} (2\, l + 1) = 2\, (2\, n - 1 + 1) \frac{n}{2} = 2\, n^2$.

5.12.5. Atomul de argon are patru pături complet sau parţial ocupate, caracterizate prin $n = 1, 2, 3, 4$.

Pătura $n = 1$ are o singură subpătură s $(l = 0)$ pe care se găsesc $(2l + 1) = 2$ electroni.

Pătura $n = 2$ are două subpături s $(l = 0)$ şi p $(l = 1)$ cu respectiv 2 şi 6 electroni.

Pătura $n = 3$ are trei subpături: s, p şi d, dintre care sînt ocupate doar subpăturile $3s$ şi $3p$, cu 2 şi respectiv 6 electroni.

Pătura $n = 4$ avînd pe subpătura s doi electroni.

6.1. Conform ipotezei lui Avogadro

$$m = \frac{203\ \text{g}}{6{,}025 \cdot 10^{23}} = 3{,}34 \cdot 10^{-22}\ \text{g}.$$

6.2. α, α, α, β^-, β^-, α.

6.3. Deoarece viteza de dezintegrare $-\frac{dN}{dt}$ este proporţională cu numărul atomilor existenţi N, rezultă că : $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$, unde λ este constanta radioactivă. Dacă N_0 este numărul de atomi aflaţi în substanţă în momentul $t = 0$, obţinem prin integrare

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_0^t dt \text{ şi } N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

6.4. Folosind relaţia precedentă, observăm că în scară semilogaritmică funcţia $\log N = \log N_0 - 0{,}4343\ \lambda t$, (unde am considerat $\log_{10} e = 0{,}4343$), reprezintă o dreaptă, a cărei pantă este : $tg\ \alpha = 0{,}4343\ \lambda$. Din figura 1 în care am reprezentat $\log R = f(t)$, şi admiţînd că viteza de numărare R a detectorului este direct proporţională cu numărul N de nucleee radioactive existente la momentul t, putem deci determina λ, observînd că

$$R = kN = kN_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \text{ sau logaritmînd}$$

$$\log R = \log R_0 - 0{,}4343\ \lambda t.$$

Dacă înlocuim $R = kN$, relaţia devine

$$\log k + \log N = \log k + \log N_0 - 0{,}4343\ \lambda t$$

relaţiile fiind obţinute în ipoteza unei stricte proporţionalităţi între viteza de numărare R şi numărul de nuclee radioactive N, dreptele au aceeaşi pantă. Rezultă: $\lambda = \frac{\log R_0 - \log R}{0{,}4343\ t}$.

Folosind punctele : $R_0 = 12\,003\ \frac{\text{imp}}{\text{min}}$, pentru $t = 0$ şi $\log R = 3{,}455$ pentru $t = 30$ zile (aproximat din fig. 1), obţinem pentru λ, valoarea : $\lambda = 0{,}0479\ \text{zile}^{-1}$.

6.5. Folosind legea dezintegrării radioactive putem scrie

$$\lambda = \frac{\log \frac{I_0}{I}}{0{,}4343\ t}$$

unde am notat prin I şi I_0 intensitatea radiaţiei emise la momentul t, respectiv la momentul $t = 0$. Înlocuind datele problemei şi ţinînd seamă de faptul că $I = I_0 - 0{,}2\ I_0 = 0{,}8\ I_0$, obţinem

$$\lambda = \frac{\log \frac{I_0}{0{,}8\ I_0}}{0{,}4343 \cdot 90\ \text{min}} = \frac{\log 1{,}25}{0{,}4343 \cdot 90\ \text{min}} = 2{,}46 \cdot 10^{-3}\ \text{min}^{-1}.$$

6.6. a) Punînd condiţia ca la timpul $t = T_{1/2}$ numărul N de nuclee radioactive rămase nedezintegrate să fie egal cu jumătate din numărul iniţial de nuclee radioactive, obţinem

$$\frac{N_0}{2} = N_0\ e^{-\lambda T_{1/2}}$$

de unde, prin logaritmare, găsim

$$T_{1/2} = \ln 2 = 2{,}303 \log 2 = 0{,}693,$$

sau

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda} \text{ şi respectiv } \lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}.$$

În cazul substanţei din problema precedentă, putem scrie

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{0{,}0479\ (\text{zile})^{-1}} \approx 14{,}45 \text{ zile}.$$

Date fiind erorile experimentale, s-ar putea atribui acest timp de înjumătăţire izotopului 32 al fosforului (timpul de înjumătăţire al fosforului — 32 este de 14,3 zile).

b) Pentru radiu—226, obţinem : $\lambda = 1{,}355 \cdot 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$.

c) Pentru a afla numărul de atomi de radiu care se dezintegrează într-o secundă într-un gram de radiu pur, vom observa că acest număr este egal cu însăşi viteza de dezintegrare a atomilor

de radiu, care poate fi aflată derivînd în raport cu timpul legea generală a dezintegrărilor radioactive: $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$, unde semnul (—) ne arată că numărul de atomi radioactivi scade în timp. Pentru a afla numărul de atomi dezintegraţi în timp de o secundă, ar trebui deci să determinăm numărul de atomi radioactivi existenţi în acel moment, în cazul nostru numărul de atomi dintr-un gram de radiu. Pentru aceasta vom folosi legea lui Avogadro, conform căreia un atom-gram din orice element, conţine un acelaşi număr de atomi egal cu $6{,}025 \cdot 10^{23}$ atomi. Deoarece un atom-gram de radiu cîntăreşte 226 grame, rezultă că: 226 g Ra conţin $6{,}025 \cdot 10^{23}$ atomi, deci

$$1\,\text{g Ra conţine} \frac{6{,}025 \cdot 10^{23}}{226} = 2{,}665 \cdot 10^{21} \text{ atomi.}$$

Folosind relaţia de definire a activităţii rezultă

$$\lambda N = 1{,}355 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} \text{ atomi} = 3{,}63 \cdot 10^{10} \frac{\text{atomi dezintegraţi}}{\text{s}}$$

Timpul de o zi, pentru care trebuie să aflăm cantitatea de radiu dezintegrată fiind foarte mic în comparaţie cu perioada de înjumătăţire, putem considera că viteza de dezintegrare este aproximativ constantă, ceea ce ne permite să aflăm numărul de atomi dezintegraţi într-o zi efectuînd o simplă înmulţire

$$\lambda N = 3{,}63 \cdot 10^{10} \frac{\text{atomi dezintergaţi}}{s} \cdot 86\,400\,s = 3{,}135 \cdot 10^{15} \text{ atomi.}$$

Acest număr de atomi corespunde unei cantităţi de

$$\frac{3{,}135 \cdot 10^{15} \text{ atomi}}{2{,}665 \cdot 10^{21} \frac{\text{atomi}}{\text{g}}} \approx 1{,}175 \cdot 10^{-6} \text{ g.}$$

d) Viaţa medie a nucleelor radioactive de un anumit tip se află mediind timpul de viaţă al nucleelor pentru toate duratele de viaţă posibile, adică de la $t = 0$ pînă la $t = \infty$ (v. fig. 2). Durata medie de viaţă a nucleelor va fi

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\,dN = \frac{\lambda}{N_0}\int_0^\infty tN_0 e^{-\lambda t}\,dt.$$

Integrînd prin părţi, obţinem

$$\tau = [-te^{-\lambda t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{0{,}693} = 1{,}44\ T_{1/2}$$

e) Timpii de înjumătăţire şi duratele medii de viaţă sînt:

$T_U = 4{,}51 \cdot 10^9$ ani, $\tau_U = 2{,}05 \cdot 10^{17}$ s $= 6{,}5 \cdot 10^9$ ani.
$T_{Th} = 1{,}4 \cdot 10^{11}$ ani, $\tau_{Th} = 6{,}63 \cdot 10^{17}$ s $= 21 \cdot 10^{10}$ ani.
$T_{Ra} = 1620$ ani, $\tau_{Ra} = 7{,}38 \cdot 10^{10}$ s $= 2330$ ani.
$T_{Rn} = 3{,}823$ zile, $\tau_{Rn} = 4{,}765 \cdot 10^5$ s $= 5{,}5$, zile.

6.7. a) Ecuaţia de dezintegrare va fi: ${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{218}_{84}\text{Po}$

b) Din legea dezintegrării radioactive scrisă cu diferenţe finite, obţinem $\Delta n = -n_0 \lambda \Delta t$, sau pentru o secundă

$$\Delta n = \frac{1\,\text{g} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}693 \cdot 1\,\text{s}}{222\,\text{g} \cdot 3{,}825 \cdot 86\,400\,\text{s}} = 5{,}66 \cdot 10^{15} \text{ particule.}$$

c) Pentru acest caz, aproximaţia precedentă nu mai este satisfăcătoare, întrucît timpul de dezintegrare depăşeşte perioada de înjumătăţire aproape de două ori; folosind legea de dezintegrare, putem calcula numărul de nuclee rămase nedezintegrate după 7 zile, care este $n = n_0 e^{-\lambda t}$, deci s-au dezintegrat $n_1 = n_0 - n = n_0 (1 - e^{-\lambda t})$ nuclee, adică

$$n_1 = \frac{1\,\text{g} \cdot 6 \cdot 10^{23}}{222\,\text{g}} \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{0{,}693 \cdot 7\,\text{d}}{3{,}825\,\text{d}}}\right)}_{0{,}72} \simeq 1{,}95 \cdot 10^{21} \text{ nuclee.}$$

d) $W_\alpha = 3{,}8 \cdot 10^5$ perechi ioni $\cdot 14{,}5$ eV $\simeq 5{,}51$ MeV.

(Pentru comparaţie în G. Hertz: Lehrbuch der Kernphysik, Teubner, Leipzig, Band II, p. 869 se indică 5,486 MeV).

6.8. a) Întrucît activitatea radioactivă este prin definiţie egală cu numărul de dezintegrări produse în unitatea de timp

$$\Lambda = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \Lambda_0 e^{-\lambda t},$$

de unde se vede că activitatea radioactivă scade în timp după aceeași lege ca și numărul de nuclee radioactive.

b) Cantitatea totală de potasiu, conținută în corpul unui om de 60 kg este : $\frac{0,3}{100} \cdot 60\,000$ g $= 180$ g potasiu.

Numărul corespunzător de atomi radioactivi va fi dat de legea lui Avogadro ; ținînd seama și de abundența izotopică a potasiului 40, obținem :

la 39,102 g corespund $6,025 \cdot 10^{23}$ atomi ;

la 180 g corespund $\frac{180}{39,102} \cdot 6,025 \cdot 10^{23}$ atomi, ceea ce ne dă pentru ^{40}K a cărui abundență izotopică este 0,0118 %

$$\frac{180}{39,102} \cdot 6,025 \cdot 10^{23} \cdot \frac{0,0118}{100} = 3,275 \cdot 10^{20} \text{ nuclee.}$$

Ținînd seamă de timpul de înjumătățire al potasiului $T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$ ani, putem scrie activitatea totală

$$\Lambda = \lambda N = \frac{0,693\ N}{T_{1/2}} = \frac{0,693 \cdot 3 \cdot 275 \cdot 10^{20} \text{ nuclee}}{1,25 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 25 \cdot 86400 \text{ s}} = 5,75 \cdot 10^3 \frac{\text{dez}}{\text{s}}$$

sau în μCi

$$\Lambda = \frac{5,75 \cdot 10^3}{3,70 \cdot 10^4} \mu\text{Ci} = 1,55 \cdot 10^{-1} \ \mu\text{Ci}.$$

Activitatea specifică va fi deci : $\Lambda_s = \frac{\Lambda}{m} = 2,583 \cdot 10^{-6} \frac{\mu\text{Ci}}{\text{g}}$.

Numărul de particule emise într-un minut va fi

$$N_\beta = \Lambda \cdot 0,89 \cdot 60 \text{ s} = 5,75 \cdot 10^3 \frac{\text{dez}}{\text{s}} \cdot 0,89 \cdot 60 \text{ s} \approx 307 \cdot 050 \text{ particule.}$$

c) Pentru a calcula activitatea specifică a plutoniului 239, ținem seama de faptul că 239 g Pu-239 conțin $6,025 \cdot 10^{23}$ atomi radioactivi cărora le corespunde activitatea $\Lambda = \lambda N$, adică activitatea specifică a Pu-239 absolut pur va fi

$$\Lambda_s = \frac{\lambda N}{M} = \frac{0,693\ N}{M T_{1/2}} = \frac{0,693 \cdot 6,025 \cdot 10^{23}}{239 \text{ g} \cdot 24 \cdot 360 \cdot 365,25 \cdot 86400 \text{ s}}$$

$$\Lambda_s = 2,265 \cdot 10^9 \frac{\frac{\text{dez}}{\text{s}}}{\text{g}} = \frac{2,265 \cdot 10^9}{3,7 \cdot 10^7} \cdot \frac{\text{mCi}}{\text{g}} = 61,2 \frac{\text{mCi}}{\text{g}}.$$

Pentru U-235 :

$$\Lambda_s = \frac{0,693 \cdot 6,025 \cdot 10^{23}}{235 \cdot 8,5 \cdot 10^8 \cdot 365,25 \cdot 86400 \cdot 3,7 \cdot 10^7} \cdot \frac{\text{mCi}}{\text{g}} = 1,765 \frac{\mu\text{Ci}}{\text{g}}.$$

6.9. a) $f = \frac{N}{N_0} = e^{\frac{-0,693\,t}{T}} = e^{-\frac{0,693 \cdot 10}{4,26}} = 0,196$.

b) Într-un atom-gram de substanță avem un număr de atomi egal cu numărul lui Avogadro ; atunci un gram de substanță va conține un număr de atomi

$$N = \frac{mN}{A} = \frac{1 \text{ g} \cdot 6,025 \cdot 10^{23}}{204 \text{ g}} \simeq 2,95 \cdot 10^{21} \frac{\text{atomi}}{\text{g}}.$$

Activitatea specifică (per gram) a unei surse avînd toți atomii radioactivi va fi

$$\Lambda_s = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0,693 \cdot 2,95 \cdot 10^{21}}{4,26 \cdot 365,25 \cdot 86400} \frac{\text{dez}}{\text{s}} = 1,53 \cdot 10^{12} \frac{\text{dez}}{\text{s}}$$

sau în Ci/g

$$\Lambda_s = \frac{1,53 \cdot 10^{12}}{3,7 \cdot 10^{10}} = 41,4 \text{ Ci/g}.$$

6.10. a) Reacția este : $^{32}_{16}S + {}^1_0n \rightarrow {}^{32}_{15}P + {}^1_1p$.

b) Pentru a afla cîte nuclee de fosfor se dezintegrează în decursul celei de a 5-a şi a 6-a zi, trebuie să calculăm numărul de nuclee radioactive existente în sursă la sfîrşitul celei de a 4-a, respectiv a 6-a zi de la prepararea sursei. Obţinem

b_1) După 4 zile

$$N = \frac{\Lambda \cdot T_{1/2}}{0{,}693} e^{-\frac{0{,}693\ t}{T_{1/2}}} = \frac{200 \cdot 3{,}7 \cdot 10^4 \frac{\text{dez}}{\text{s}} \cdot 14{,}3 \cdot 86400\ \text{s}}{0{,}693} e^{-\frac{0{,}693 \cdot 4\ \text{zile}}{14{,}3\ \text{zile}}}$$

de unde : $N_4 = 1{,}32 \cdot 10^{13} \cdot e^{-0{,}1937} \approx 1{,}088 \cdot 10^{13}$ nuclee.

b_2) După 6 zile : $N_6 = 1{,}32 \cdot 10^{13} \cdot e^{-0{,}29055} = 9{,}87 \cdot 10^{12}$ nuclee

Rezultă numărul de nuclee dezintegrate în cursul celor două zile :

$$\Delta N = N_4 - N_6 = N_0 \left(e^{-\lambda t_4} - e^{-\lambda t_6}\right) = 1{,}01 \cdot 10^{12} \text{ nuclee.}$$

c) Activitatea specifică a ^{32}P pur se poate calcula din expresia activităţii : $\Lambda = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$; împărţind cu masa unui atom-gram rezultă : $\Lambda_s = \frac{\Lambda}{A} = \frac{\lambda N}{A}$, unde N este numărul lui Avogadro, sau :

$$\Lambda_s = \frac{0{,}693}{T} \frac{N}{A} = 1{,}05 \cdot 10^{16} \frac{\text{dez}}{\text{s} \cdot \text{g}} \text{ sau în Ci : } 2{,}84 \cdot 10^5 \frac{\text{Ci}}{\text{g}}.$$

d) Efectuînd o regulă de trei simplă, rezultă concentraţia ; dacă 40 mg... 1 Ci

$$1\ \text{g} \ldots x = \frac{1\ \text{Ci} \cdot 1\text{g}}{40\ \text{mg}} = 25\ \text{Ci},$$ deci 1 gram de substanţă are o activitate de 25 Ci ; concentraţia de atomi radioactivi va fi de :

$$\frac{25}{2{,}84 \cdot 10^5} = 8{,}8 \cdot 10^{-5}.$$

6.11. Folosind legea de dezintegrare radioactivă, avem

$$\frac{N_I(t)}{N_p(t)} = \frac{N_{I_0} e^{-\lambda_I t}}{N_{P0} e^{-\lambda_p t}} \text{ sau : } \frac{1}{2} = 2\ x, \text{ de unde}$$

$$e^{(\lambda_p - \lambda_I)t} = \frac{1}{4} \text{ sau } (\lambda_I - \lambda_p)\ t = 2 \ln 2.$$

$$\text{Dar : } \lambda = \frac{\ln 2}{T}, \text{ deci}$$

$$t\left(\frac{1}{T_I} - \frac{1}{T_p}\right) \ln 2 = 2 \ln 2, \text{ şi rezultă : } t = 2 \frac{T_I\, T_p}{T_p - T_I} = 36{,}3 \text{ d.}$$

6.12. Se vor dezintegra în fiecare secundă un număr de atomi egali cu activitatea radioactivă, adică

$$\Lambda = \lambda N = 1{,}42 \cdot 10^{-11}\ \text{s}^{-1} \cdot \frac{1\ \text{g} \cdot 6{,}025 \cdot 10^{23}}{226\ \text{g}} \approx 3{,}78 \cdot 10^{10} \frac{\text{atomi}}{\text{s}}.$$

Prin suprafaţa indicată trec în fiecare secundă un număr de fotoni :

$$I = \frac{n\Lambda \cdot s}{4\ \pi r^2} = \frac{4 \cdot 3{,}78 \cdot 10^{10} \cdot 1\ \text{cm}^2}{4\ \pi\ (100)^2\ \text{cm}^2} \frac{\text{cuante}}{\text{s}} = 1{,}2 \cdot 10^6 \frac{\text{cuante}}{\text{s}}.$$

6.13. Fie V volumul sîngelui în care se dizolvă soluţia radioactivă ; atunci, pentru activitatea specifică a sîngelui putem scrie

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda_0}{V} e^{-\lambda t}, \text{ de unde } \ln V = \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda_s} - \lambda t,$$

$$\text{sau } \ln V = \ln \frac{10^3}{\frac{300}{3}} - \frac{0{,}693}{14{,}9} \cdot 2 = 2{,}303 - 0{,}093 = 2{,}21.$$

De aici : $V \approx 9$ litri.

6.14. Din legea dezintegrării radioactive

$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t}$, rezultă : $t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{5570}{0{,}693} \ln \frac{10{,}4}{7{,}6} \approx 2600$ a.

6.15. a) Din legea dezintegrării radioactive : $5 = 15\ e^{-\lambda t}$;

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 3 = \frac{5650 \cdot 1{,}09861}{0{,}693} = 8956{,}9 \text{ ani.}$$

b) ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{0}_{1}e = {}^{14}_{7}N + 156$ keV, unde se admite că nucleul de ${}^{14}_{7}N$ nu preia energia de recul, nici nu este excitat. Scăzînd :

$$\frac{1}{2} mv^2 = W_\beta, \text{ rezultă : } v = \sqrt{\frac{2 \cdot 156 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-16}}{9 \cdot 10^{-31}}} \approx 2{,}355 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.16. Pentru a afla numărul de dezintegrări α, vom scrie : (pentru prima serie) : $(232-208) : 4 = 6$ dezintegrări ; prin emisia a 6 particule α, nuclidul ar trebui însă să ajungă la : $Z = 90 - 6 \cdot 2 = 78$; în realitate ajunge la $Z = 82$, ceea ce se poate realiza prin încă patru dezintegrări β^- ; pentru celelalte serii se va obține : 7α și 4β ; 8α și 6β ; 7α și 4β. (Am folosit în calculul de mai sus faptul că la dezintegrarea α numărul de masă scade cu 4 unități, iar numărul de ordine cu două unități, iar la o dezintegrare β, numărul de masă nu variază, pe cînd numărul de ordine crește cu o unitate.)

6.17. Ecuațiile celor două procese se scriu

a) $${}^{59}_{27}Co + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{60}_{27}Co^* + \gamma$$

$${}^{60}_{27}Co^* \rightarrow {}^{0}_{1}e + {}^{60}_{28}Ni + h\nu$$

unde nucleul de radiocobalt conține 27 protoni și 33 neutroni.

b) Timpul în care intensitatea radiației scade cu 25 %, va fi dat de relația

$$0{,}75\ N_0 = N_0\ e^{-\lambda t}, \text{ de unde : } t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{0{,}75} \approx 2{,}2 \text{ ani.}$$

c) Din ecuația de conservare a energiei

$$h\nu = {}_{-1}^{0}e + {}^{0}_{1}e + 2W_c = 2m_0c^2 + 2W_c, \text{ rezultă}$$

$$v = \sqrt{\frac{h\nu - 2\ mc^2}{m_0}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{0{,}5}}\ c = 2{,}12 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) Numărul nucleelor inițiale este

$$N_0 = \frac{m \cdot \mathcal{N}}{A} = \frac{6{,}025 \cdot 10^{23} \cdot 2}{60} = 2 \cdot 10^{22}.$$

Numărul nucleelor dezintegrate în timpul $t = 5{,}3$ ore, se poate afla din

$$\Delta N = N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}) \approx N \lambda \Delta t ;$$

rezultă

$$\Delta N_d = 2 \cdot 10^{22} \cdot \frac{0{,}693}{5{,}3 \cdot 365 \cdot 24} \cdot 5{,}3 = 1{,}58 \cdot 10^{18}.$$

Fiecare nucleu produce un electron și doi fotoni, deci o energie

$$W_1 = 0{,}3 + 21{,}25 = 2{,}8 \text{ MeV} = 2{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} = 4{,}48 \cdot 10^{-13} \text{ J.}$$

Căldura produsă de toate nucleele dezintegrate este

$$Q = W_1 \cdot N'_d = 4{,}48 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}58 \cdot 10^{+18} = 7{,}08 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

6.18. a) Ecuațiile vor fi

$${}^{24}_{12}Mg\ (n, p)\ {}^{24}_{11}Na ; \quad {}^{24}_{11}Na \rightarrow {}^{0}_{1}e + {}^{24}_{12}Mg.$$

b) Numărul de perechi de ioni produse de o particulă β^- în hidrogen, va fi

$$n = \frac{1{,}4 \cdot 10^6 \text{ eV}}{13{,}6 \text{ eV}} = 1{,}03 \cdot 10^5.$$

c) Variația de temperatură se poate calcula din relația calorimetrică :

$$W = Mc\ \Delta T = \Delta N \cdot W_\beta .$$

Din relația aproximativă $\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$, (unde semnul $(-)$ indică scăderea numărului de nuclee radioactive) și folosind re-

laţiile $\lambda = \frac{0{,}693}{T}$, şi legea lui Avogadro $N = \frac{m}{A}\mathcal{N}$, obţinem

$$Mc\Delta T = W_\beta \cdot \lambda \cdot N \cdot \Delta t = W_\beta \lambda \cdot \frac{m}{A}\mathcal{N} \cdot \Delta t$$

şi în final

$$\Delta T = \frac{0{,}693\ W_\beta\ m\ \mathcal{N}\ \Delta t}{M\,c} =$$

$$= \frac{0{,}693 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1\ \text{min}}{0{,}5\ \text{kg} \cdot 4185\ \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 24\ \text{g} \cdot 15 \cdot 60\ \text{min}} = 6{,}18\ °\text{C}.$$

d) Pentru activitatea specifică volumică în sînge a ^{23}Na, putem scrie

$$\Lambda_s = \Lambda_{s_0}\, e^{-\lambda t} \text{ sau } \frac{16}{60} = \frac{2000}{V}\, e^{-\frac{0{,}693 \cdot 5}{15}};\ V = 7500\ \text{cm}^3 \cdot e^{-0{,}231}$$

sau

$$V = 7{,}5\ \text{l}\, e^{-0{,}231} = 7{,}5 \times 0{,}793\ \text{l} = 5{,}947\ \text{l}.$$

e) Pentru a produce preparatul cu o activitate iniţială de $\Lambda = 2000\ \frac{\text{dez}}{\text{s}}$ care corespunde unui număr de atomi de sodiu $\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$, deducem numărul iniţial de atomi de sodiu

$$N_0 = \frac{1}{\lambda}\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{15 \cdot 3600\ \text{s} \cdot 2000\ \text{dez}}{0{,}693 \cdot 1\ \text{s}} \approx 1{,}56 \cdot 10^8\ \text{atomi}.$$

Probabilitatea de interacţie a neutronilor cu nucleele de sodiu fiind de numai 20 %, rezultă că este necesar un număr de :

$$n = \frac{1{,}56 \cdot 10^8}{0{,}2} = 7{,}8 \cdot 10^8\ \text{neutroni}.$$

6.19. După un timp t, din cele N_0 nuclee iniţiale de ^{238}U, rămîn : $N = N_0 e^{-\lambda t}$ nuclee, restul de : $N_{Pb} = \Delta N = N_0 - N = N_0\,(1 - e^{-\lambda t})$ trecînd în izotopul 206 al Pb. (Remarcăm că în

seria uraniului toate perioadele de dezintegrare sînt neglijabile în comparaţie cu perioada ^{238}U.) Observînd că în problemă s-au indicat mase şi nu numărul de atomi, vom scrie, folosind legea lui Avogadro : $\frac{N}{m} = \frac{\mathcal{N}}{A}$, şi înlocuind, obţinem

$$\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} = \frac{m_{Pb}\frac{\mathcal{N}}{A_{Pb}}}{m_U \frac{\mathcal{N}}{A_U}} = 1 - e^{-\lambda t} \text{ sau}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \frac{m_{Pb}}{m_U} \cdot \frac{A_U}{A_{Pb}} = 1 - 0{,}2 \cdot \frac{238}{206} = 0{,}7685.$$

$$t = \frac{-1}{\lambda} \ln 0{,}7685 = -1{,}44 \cdot 4{,}5 \cdot 10^9\ \text{ani} \cdot \ln 0{,}7685 =$$

$$= 6{,}48 \cdot 10^9\ \text{ani} \cdot 2{,}303\,(-1 + 0{,}8856) \approx 1{,}707 \cdot 10^9\ \text{ani}.$$

Pentru a putea folosi scara liniară a timpilor radioactivi ar trebui să putem dezvolta exponenţiala în serie, scriind

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t \text{ şi deci } \frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} \approx \lambda t \text{ sau } N_{Pb} = \lambda\, N_{U_0}\, t.$$

Dezvoltarea în serie se poate face numai dacă $\lambda t \ll 1$; în cazul de faţă această condiţie nu este însă îndeplinită. Calculînd cu această „scară liniară" în acest caz, se obţine $t \approx 1{,}5 \cdot 10^9$ ani.

6.20. Fie $N_0 = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ numărul iniţial de nuclee radioactive de U^{238} conţinute într-un mol de substanţă. Numărul N de nuclee rămase după timpul t este $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ şi întrucît $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{T}$, obţinem $\ln \frac{N_0}{N} = \frac{0{,}693\ t}{T}$.

Dacă n este numărul de nuclee dezintegrate, evident că $N_0 = N + n$

şi deci $\ln \frac{N+n}{N} = \ln\left(1 + \frac{n}{N}\right) = \frac{0{,}693}{T}\ t.$

Deoarece $\frac{n}{N} \ll 1$ putem dezvolta în serie $n\left(1+\frac{n}{N}\right)$ neglijînd termenii de ordin superior

$$\ln \frac{N_0}{N} = \ln\left(1+\frac{n}{N}\right) \simeq \frac{n}{N} = \frac{0{,}693}{T}\, t,$$

și obținem $t = \frac{nT}{0{,}693\ N} = \frac{nT}{0{,}693\ (N_0 - n)}$.

Înlocuind în relația astfel obținută datele problemei, căpătăm: $t = 2{,}5 \cdot 10^8$ ani, valoare care reprezintă virsta aproximativă de cristalizare a rocilor terestre din substanța topită.

6.21. a) Numărul de nuclee radioactive produs rămânînd constant, rezultă că putem scrie

$$N_B = \text{const}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = 0 = N_A(t)\lambda_A - N_B(t)\cdot\lambda_B$$

de unde

$$N_A\ \lambda_A = N_B\ \lambda_B \text{ sau } \frac{N_A}{T_A} = \frac{N_B}{T_B}.$$

Timpul de înjumătățire al uraniului natural poate fi determinat cu ajutorul relației precedente

$$T_U = T_{Ra} \cdot \frac{N_U}{N_{Ra}} = 1620 \text{ ani} \cdot \frac{2{,}78 \cdot 10^6 \text{ atomi}}{1 \text{ atom}} \approx 4{,}5036 \cdot 10^9 \text{ ani}.$$

b) Conform schemei de dezintegrare: ${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} + \alpha + 2\beta^-$ (vezi schema de dezintegrare a familiei uraniului) putem scrie

$$\frac{T_{U^{234}}}{T_{U^{238}}} = \frac{N_{234}}{N_{238}} = \frac{0{,}006}{100}, \text{ de unde } T_{1/2\,U^{234}} \approx 4{,}5 \cdot 10^9 \text{ ani} \cdot 6 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^5 \text{ ani}.$$

c) Perioada luată în considerație, 1 an, fiind totuși mult mai mică decît timpul de înjumătățire al radiului-226 (1620 ani) putem scrie în prima aproximație:

$$N_{\text{dez.}} = N_0\,(1 - e^{-\lambda t}) \approx N_0\ \lambda\, t,$$

m fiind masa radiului conținut în fiolă, iar A_{Ra} — masa atomică a radiului, numărul dezintegrărilor suferite de nucleul de radiu (fiecare dezintegrare fiind însoțită de emisia unei particule α) este:

$$N_{\text{dez.}} = \frac{m}{A_{Ra}}\ \ln 2\ \frac{t}{T_{1/2}}. \tag{2}$$

Deoarece activitatea α totală a unui preparat de radiu în echilibru cu produsele sale de dezintegrare, este de 5 ori mai mare decît aceea a radiului singur, numărul total al particulelor α produse în timp de 1 an va fi

$$N = \frac{5m}{A_{Ra}}\ln 2\ \frac{t}{T_{1/2}} \tag{3}$$

iar numărul de moli de heliu ce se produc este

$$N_{\text{moli heliu}} = \frac{5m\mathscr{N}}{\mathscr{N} A_{Ra}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{t}{T_{1/2}} \tag{4}$$

unde $\mathscr{N}$ — numărul lui Avogadro.

Se știe că un mol de gaz perfect ocupă în condiții „normale'' un volum $\mathscr{V}_N = 22{,}4141$ l. Rezultă că volumul ocupat (în condiții normale) de heliu acumulat în timp de 1 an în fiola descrisă, este $V = \frac{5\,m\mathscr{V}N}{\mathscr{N}\,A_{Ra}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{112{,}07 \cdot 0{,}69315}{226 \cdot 1{,}62}\ \text{cm}^3 = 0{,}2116\ \text{cm}^3$, acumulat într-un an, la 1 g Ra în echilibru cu produsele de dezintegrare.

6.22. În cazul stabilirii echilibrului secular, activitatea nuclizilor din seria radioactivă este aceeași, adică

$$\Lambda = \lambda_{Ra\,D}\, N_{Ra\,D} = \lambda_{Ra\,E}\ N_{Ra\,E} = \lambda_{Po}\ N_{Po}.$$

Folosind relaţia $T = 0{,}693/\lambda$, găsim

$$1{,}44\ \Lambda = \frac{N_{\text{Ra D}}}{T_{\text{Ra D}}} = \frac{N_{\text{Ra E}}}{T_{\text{Ra E}}} = \frac{N_{\text{Po}}}{T_{\text{Po}}}$$

$$N_{\text{Ra D}} = 1{,}44 \cdot 3{,}7 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} \cdot 6{,}94 \cdot 10^8\ \text{s} \approx 3{,}7 \cdot 10^{13}\ \text{atomi},$$

şi similar : $N_{\text{Ra E}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{10}$ atomi ; $N_{\text{Po}} \approx 6{,}4 \cdot 10^{11}$ atomi.

Numărul de particule β emise în fiecare secundă de nucleele de Ra D şi Ra E în echilibru secular, va fi egal cu activitatea de echilibru, adică obţinem

$$\Lambda_\beta = \lambda_{\text{Ra D}}\, N_{\text{Ra D}} = \frac{0{,}693 \cdot 3{,}356 \cdot 10^{13}}{6{,}3 \cdot 10^8\ \text{s}} = 3{,}68 \cdot 10^4\ \frac{\text{part. } \beta}{\text{s}}.$$

6.23. a) Emisia unor particule alfa din nucleul ^{213}Po se face după ecuaţia $^{213}_{84}\text{Po} \to {}^4_2\text{He} + {}^{209}_{82}\text{Pb}$, cele două fragmente respectînd şi legea conservării impulsului. Dacă vom considera că nucleul de Po care se dezintegrează se găsea iniţial în repaus, atunci din legea conservării impulsului rezultă

$\mathbf{0} = \vec{p} + \vec{p}_{\text{Pb}}$, de unde $p_\alpha = p_{\text{Pb}}$ (impulsurile celor 2 fragmente).

Notînd cu W_α şi W_{Pb} energiile cinetice corespunzînd celor două fragmente (particula α şi nucleul de plumb) avem

$$W_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m}, \quad W_{\text{Pb}} = \frac{p_{\text{Pb}}^2}{2A_{\text{Pb}}}.$$

Efectuînd raportul egalităţilor de mai sus, obţinem

$$\frac{W_{\text{Pb}}}{W} = \frac{m_\alpha}{A_{\text{Pb}}} \text{ şi } \frac{W_{\text{Pb}} + W_\alpha}{W_\alpha} = 1 + \frac{m_\alpha}{A_{\text{Pb}}}.$$

Dar $W_\alpha + W_{\text{Pb}}$ = energia totală eliberată în urma procesului de dezintegrare (W_t). Din egalităţile de mai sus, obţinem

$$W_t = W\left(1 + \frac{m_\alpha}{A_{\text{Pb}}}\right) = 8{,}34\ \text{MeV}\left(1 + \frac{4}{209}\right) = 8{,}5\ \text{MeV}$$

(eroarea de calcul — prin adaus — fiind mai mică decît $5 \cdot 10^{-3}$).

b) Energia totală emisă în fiecare act de dezintegrare are expresia : $W_t = W_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{A_{\text{Ac}}}\right)$.

Într-un gram de ^{225}Ac se găsesc iniţial $\frac{\mathcal{N}}{A_{\text{Ac}}}$ nuclee de actiniu nedezintegrate, unde $\mathcal{N}$ — numărul lui Avogadro, iar A_{Ac} — numărul de masă al actiniului — 225.

Din acestea, după trecerea timpului τ: $N_\tau = Ne^{-\lambda\tau} = \frac{\mathcal{N}}{A_{\text{Ac}}} e^{-1}$ nuclee au rămas nedezintegrate.

A avut loc deci un număr de dezintegrări, dat de

$$N_{\text{dez}} = N - N_\tau = \frac{\mathcal{N}}{A_{\text{Ac}}} - \frac{\mathcal{N}}{A_{\text{Ac}} e} = \frac{\mathcal{N}(e^{-1})}{A_{\text{Ac}}\, e}.$$

Energia totală degajată prin dezintegrare în timpul τ (durata medie de viaţă) de un gram al izotopului α — activ ^{225}Ac va fi

$$W = N_{\text{dez}}\, W_t = \frac{N(e^{-1})}{A_{\text{Ac}}\, e} W_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{A_{\text{Ac}}}\right);$$

introducînd datele enunţului

$$W = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{atomi}}{\text{atom-gram}}}{225\ \frac{\text{g}}{\text{atom-gram}}}\ (1 - 0{,}36879) \cdot 5{,}8\ \frac{\text{MeV}}{\text{dez}} \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{245}{225}\right) = 1{,}6 \cdot 10^9\ \frac{\text{J}}{\text{g}}.$$

c$_1$) Deoarece $T \gg 1$ s fracţiunea de dezintegrare va fi λt. Numărul nucleelor conţinute iniţial în cantitatea m fiind $N_0 = \frac{\mathcal{N}}{A} \cdot m$, iar energia totală produsă la fiecare dezintegrare

$W_t = W_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{A_{Rn}}\right)$, rezultă că energia căutată va avea expresia

$$W = \frac{\mathcal{N}}{A}\cdot m\cdot\lambda\cdot 1\ \text{s}\cdot W_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{A_{Rn}}\right)\cdot$$

Deoarece $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, rezultă $W = \frac{\mathcal{N}m}{A}\cdot\frac{\ln 2\cdot 1\ \text{s}}{T_{1/2}}\cdot W_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{A_{Rn}}\right)\cdot$

Trecînd la calculul numeric, obținem

$$W = \frac{6{,}023\cdot 10^{23}\ \frac{\text{nuclee}}{\text{atom-gram}}\cdot 10^{-2}\ \text{g}}{222\ \frac{\text{g}}{\text{atom-gram}}}\cdot\frac{0{,}69315\cdot 1\ \text{s}}{3{,}8\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}}\cdot\frac{\text{dez.}}{\text{nuclee}}\cdot$$

$$\cdot 5{,}5\cdot 10^6\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{dez}}\cdot\frac{226}{222}\approx 50\ \text{J sau}\ Q = 12\ \text{cal}$$

(căldura degajată în timp de 1 secundă, prin dezintegrarea α a 10 mg de ^{222}Rn).

c) Conform definiției, în timpul $t = T_{1/2}$, fracțiunea de dezintegrare va fi $f = \frac{1}{2}$, și formula (1′) se modifică în sensul

$$W_{t=T_{1/2}} = \frac{\Delta m}{A}\cdot\frac{1}{2}\cdot W_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{A_{Rn}}\right) = \frac{T_{1/2}}{2\ln 2\cdot 1\ \text{s}}\cdot W_{t=1\ \text{s}}. \qquad (2)$$

Pe baza rezultatului obținut mai sus, obținem pentru căldura degajată pe o durată de timp egală cu timpul de înjumătățire

$$Q_{t=T_{1/2}} = \frac{3{,}8\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}}{2\cdot 0{,}69315\cdot 1\ \text{s}}\cdot 12{,}04\ \text{cal} = 2851\ \text{kcal}.$$

d) Scriind $W = JQ$, unde Q este cantitatea de căldură degajată, iar J echivalentul mecanic al caloriei, obținem

$$\Lambda\cdot t\cdot W_\alpha = J\cdot mc\Delta t, \text{ de unde } W = 5{,}3\ \text{MeV}.$$

6.24. a) $v = 1{,}52\cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot$

b) Energia totală dezvoltată în timpul scăpării particulei α este egală cu suma dintre energia cinetică E_1 a particulei α și energia cinetică E_2 a nucleului rezidual. Astfel

$$E_x = E_1 + E_2,$$

În plus, în cursul dezintegrării are loc conservarea impulsului. Impulsul sistemului înaintea dezintegrării fiind nul, după dezintegrare avem $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$, deci $\vec{p}_1^{\,2} = \vec{p}_2^{\,2}$.

Dar $\vec{p}_1^{\,2} = (m_1v_1)^2 = 2m_1\frac{m_1v_1^2}{2} = 2m_1E_1$ și $\vec{p}_2^{\,2} = 2m_2E_2$.

Din $2m_1E_1 = 2m_2E_2$, se obține $E_2 = \frac{m_1}{m_2}E_1$.

Astfel $E_x = E_1 + \frac{m_1}{m_2}E_1 = E_1\frac{m_1+m_2}{m_2} = 4{,}87$ MeV.

6.25. La dezintegrarea nucleului, energia cinetică totală W_t se compune din energiile cinetice W ale particulei α și a nucleului rezidual W_r: $W_t = W + W_r$.

Dacă notăm cu m și v, respectiv cu M și V masele și vitezele particulei α și a nucleului rezidual, rezultă că

$$W_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2.$$

Pe de altă parte, din legea de conservare a impulsului obținem: $V = \frac{mv}{M}$ și, înlocuind în relația de mai sus, căpătăm

$$W_t = W\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot$$

Expresia reprezintă energia totală eliberată la emisia unei particule α din nucleul considerat. Într-un interval de timp t numărul nucleelor rămase este $N_0e^{-\lambda t}$, iar numărul nucleelor dezintegrate este $N = N_0(1-e^{-\lambda t})$, unde N_0 reprezintă numărul inițial de nuclee existente în masa m. Dacă M_p este masa unui atom-gram de plutoniu și N_A numărul lui Avogadro, rezultă

$$N_0 = \frac{mN_A}{M_p}$$

așa încît numărul total de dezintegrări α este

$$N = \frac{m N_A}{\mu}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Cantitatea de căldură degajată prin aceste dezintegrări este egală cu energia totală eliberată

$$Q = \frac{W_m N_A}{\mu}(1 - e^{-\lambda t})\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 1{,}15 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

6.26. a) Activitatea substanței radioactive se exprimă în cazul de față prin numărul de particule α emise în unitatea de timp; în timpul t va fi deci emisă energia: $W = \Lambda W_\alpha t$, care este reținută complet în calorimetru (particulele α reprezintă radiații foarte slab penetrante), producînd o creștere de temperatură

$$\Delta T = \frac{W}{mc} = \frac{\Lambda W_\alpha t}{mc} =$$

$$= \frac{7{,}4 \cdot 10^9 \frac{\text{dez}}{\text{s}} \cdot 5{,}3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{13} \text{ J} \cdot 3{,}16 \cdot 10^4 \text{ s}}{16{,}75 \text{ J/°C}} \approx 3{,}6°\text{C}.$$

b) În cazul cînd ținem seama și de energia de recul, avem

$$W_\alpha + W_r = W_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{M}\right) = 5{,}3 \text{ MeV}\left(1 + \frac{4}{210}\right) = 5{,}25 \text{ MeV}.$$

Creșterea de temperatură calculată va fi în acest caz: 13,04°C.

6.27. 1 MeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J.

Eliberarea de energie va corespunde deci unui număr de $\Lambda = \frac{10 \text{ J/s}}{1{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 3{,}68 \cdot 10^{13} \frac{\text{dez}}{\text{s}}$. Dar $\Lambda = \lambda N$ și deci

$$N = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\Lambda T}{0{,}693} = \frac{3{,}68 \cdot 10^{13} \frac{\text{dez}}{\text{s}} \cdot 14{,}3 \cdot 86400 \text{ s}}{0{,}693} \approx 6{,}55 \cdot 10^{19} \text{ atomi}.$$

Pe de altă parte, un atom-gram din orice substanță conține un număr de atomi egal cu numărul lui Avogadro, deci

$$\frac{A}{\mathcal{N}} = \frac{m}{N}, \text{ deci } m = \frac{N}{\mathcal{N}} A = \frac{6{,}55 \cdot 10^{19}}{6 \cdot 10^{23}} 32 \text{ g} = 3{,}5 \text{ mg}.$$

6.28. a_1) Activitatea specifică Λ_s a stronțiului pentru cazul cînd toți atomii de stronțiu din materialul activ ar fi radioactivi se poate calcula astfel: $\Lambda = \frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} \cdot N$, unde N este numărul de atomi de stronțiu radioactivi, și conform legii lui Avogadro, un număr de atomi egal cu numărul lui Avogadro cîntărește un număr de grame egal cu masa atomică. Putem scrie $N_{\text{atomi}} = \frac{m}{M_{Sr}} \cdot N_{Av}$. Înlocuind în expresia precedentă, obținem $\Lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{M_{Sr}} \cdot N_{Av}$, expresie din care obținem activitatea specifică a preparatului radioactiv:

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda}{m} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_{Av}}{M_{Sr}},$$

în care toate mărimile sînt cunoscute. Conform datelor problemei trebuie ca la masa m de preparat radioactiv să adăugăm cele 2,2 g de stronțiu stabil, pentru a obține un preparat final cu activitatea specifică de 1 mCi/g, adică putem scrie: $1 \frac{\text{mCi}}{\text{g}} = \frac{\Lambda}{m + 2{,}2 \text{ g}}$, relație care constituie a 2-a ecuație a sistemului în Λ și m, din care determinăm masa m de atomi radioactivi necesară. Găsim

$$\Lambda = \frac{0{,}693 \ m}{28 \cdot 365{,}25 \cdot 86400 \text{ s}} \cdot \frac{6{,}025 \cdot 10^{23}}{90 \text{ g}} \approx 5{,}25 \cdot 10^{12} \ m \frac{\text{dez.}}{\text{s} \cdot \text{g}}$$

expresie pe care o înlocuim în cea de a 2-a ecuație a sistemului. Se obține $3{,}7 \cdot 10^7 \frac{\text{dez.}}{\text{s} \cdot \text{g}} = 5{,}25 \cdot 10^{12} \frac{\text{dez.}}{\text{s} \cdot \text{g}} \cdot \frac{m}{m + 2{,}2 \text{ g}}$, de unde obținem $m = 15{,}5$ μg.

Activitatea specifică a ^{90}Sr va fi deci

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda}{m} = 5{,}25 \cdot 10^{12} \frac{\text{dez.}}{\text{s} \cdot \text{g}} = \frac{5{,}25 \cdot 10^{12}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{\text{Ci}}{\text{g}} \approx 142 \frac{\text{Ci}}{\text{g}}.$$

a_2) În realitate, preparatele comerciale prezintă activități specifice mult mai mici decît cea a stronțiului pur, ca, de exemplu, activitatea indicată, de $500 \frac{\text{mCi}}{\text{g}}$. Pentru acest caz, putem scrie: $500 \frac{\text{mCi}}{\text{g}} = \frac{\Lambda}{m}$, pentru preparatul radioactiv. Preparatul produs

prin diluare, de exemplu, va mai prezenta numai o activitate specifică de

$$1\,\frac{\text{mCi}}{\text{g}} = \frac{A}{m + 2{,}2\ \text{g}} = 500\,\frac{\text{mCi}}{\text{g}} \cdot \frac{m}{m + 2{,}2\ \text{g}},\ \text{de unde}\ m = \frac{2{,}2\ \text{g}}{499} \approx$$

$$\approx 4{,}408\ \text{mg}.$$

b) Activitatea specifică volumică inițială este egală cu $4000\,\frac{\text{dez.}}{\text{s}}$ / $1\ \text{cm}^3$. Dacă notăm cu V, volumul sîngelui animalului, atunci prin diluție activitatea specifică volumică devine $A_s' = \frac{4000\ \text{dez./s}}{\text{V} + 1\ \text{cm}^3}$. După 3 ore, activitatea volumică specifică scade prin dezintegrare de $e^{-\lambda t} = e^{-0{,}693 \cdot 3/15}$ ori, adică devine egală cu $50\,\frac{\text{dez./s}}{\text{cm}^3}$, deci

$$A_s'' = A_s' \cdot e^{-\lambda t} \text{ sau } 50\,\frac{\frac{\text{dez.}}{\text{s}}}{\text{cm}^3} = \frac{40000\,\frac{\text{dez.}}{\text{s}}}{V + 1\ \text{cm}^3} \cdot e^{-0{,}693 \cdot 3/15},$$

de unde obținem $V \approx 68{,}6\ \text{cm}^3$.

c) Pentru a calcula ce fracțiune din volumul de solvent trebuie evaporată, vom scrie expresiile activităților volumice inițială și finală

$$\frac{A}{V_i} = 6000\,\frac{\frac{\text{dez.}}{\text{s}}}{\text{cm}^3};\quad \frac{A}{V_f} = 19\,000\,\frac{\frac{\text{dez.}}{\text{s}}}{\text{cm}^3}$$

unde A activitatea absolută și cu V_i și V_f volumul inițial și cel final al soluției. Admițînd că la evaporare fracțiunea radioactivă rămîne în soluție, putem scrie împărțind cele două expresii

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{6\,000}{19\,000},\ \text{de unde obținem}\ \frac{V_i - V_f}{V_i} = 1 - \frac{V_f}{V_i} = \frac{13}{19} = 0{,}685.$$

Dintr-un litru de soluție va trebui deci să evaporăm circa 685 cm^3, rămînînd 315 cm^3.

6.29. a) Viteza de formare a elementului B este proporțională cu numărul de atomi ai elementului B, existenți la un moment dat și cu numărul atomilor existenți din elementul A

$$\frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A.$$

Pe de altă parte, din legea dezintegrării radioactive rezultă că $N_A = N_{A_0} e^{-\lambda t}$, așa încît ecuația diferențială ce descrie viteza de formare a elementului radioactiv B devine

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \lambda_A N_{A_0} e^{-\lambda_A t} \tag{1}$$

soluția acestei ecuații este soluția generală a ecuației omogene, la care se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene. Ecuația omogenă $\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = 0$ are soluția generală $N_B = Ce^{-\lambda_B t}$. Soluția particulară a ecuației neomogene (1) o căutăm sub forma $N_B = K(t)\,e^{-\lambda_A t}$. Introducînd această valoare în ecuația (1) obținem pentru K expresia: $K = \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}$, deci soluția generală a ecuației neomogene (1) este de forma

$$N_B = Ce^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A N_A(0)}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t};$$

din condițiile inițiale $t = 0$, $N_B(0) = 0$, rezultă pentru C

$$C = -\frac{\lambda_A N_A(0)}{\lambda_B - \lambda_A}$$

și în final

$$N_B = \frac{\lambda_A N_A(0)}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$$

b) Pentru a afla momentul în care numărul de nuclee de tip B este maxim, vom pune condiția: $\frac{dN_2}{dt} = 0$, ceea ce ne dă

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_M} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_M}, \text{ de unde}$$

$$t_M = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

6.30. Conform rezultatului obținut în problema (6.31) numărul de nuclee de Ra B variază în timp după legea

$$N_B(t) = N_A(0) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}),$$

unde λ_A și λ_B reprezintă constantele radioactive ale celor două specii de Ra. Pentru aflarea maximului lui $N_B(t)$ trebuie să punem condiția $\frac{dN_B}{dt} = 0$. De aici rezultă

$$N_A(0) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (-\lambda_A e^{-\lambda_A t} + \lambda_B e^{-\lambda_B t}) = 0$$

de unde

$$t = \frac{\ln \frac{\lambda_A}{\lambda_B}}{\lambda_B - \lambda_A}. \quad \text{Dar: } \lambda_A = \frac{\ln 2}{T_A} \text{ și } \lambda_B = \frac{\ln 2}{T_B}$$

deci

$$t = \frac{\ln \frac{T_B}{T_A}}{\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right) \ln 2} = 10{,}7 \text{ minute}.$$

6.31. Din problema precedentă se știe că

$$N_B(t) = N_A(0) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t});$$

deoarece $\lambda_B \gg \lambda_A$ rezultă că $e^{-\lambda_B t} \ll e^{-\lambda_A t}$, deci putem neglija factorul $e^{-\lambda_B t}$. Obținem

$$N_B(t) = N_A(0) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} = N_A(t) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \text{ sau } \frac{N_B}{N_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}.$$

Se vede că în condițiile date, după un timp numărul de nuclee din ambele specii se găsește într-un raport constant și de aici cantitățile lor descresc cu aceeași viteză.

6.32. Din expresia energiei de legătură

$$W = c^2 \Delta m = [Z m_p + (A - Z) m_n - M] c^2, \text{ rezultă}$$

$$M = Z m_p + (A - Z) m_n - \frac{W}{c^2} = 2 \cdot 1{,}00728 + 4 \cdot 1{,}00866 -$$

$$- \frac{29{,}27 \text{ MeV}}{931 \text{ MeV/u}} \approx 6{,}0178 \text{ u} \approx 10^{-26} \text{ kg}.$$

6.33. a) Ecuațiile celor trei procese vor fi

$$^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}_{30}\text{Zn} + e^- + \tilde{\nu}$$

$$^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}_{28}\text{Ni} + e^+ + \nu$$

$$^{64}_{29}\text{Cu} + e^- \rightarrow {}^{64}_{22}\text{Ni} + \nu$$

unde s-a notat cu $\tilde{\nu}$ și ν particulele numite „antineutrino" și „neutrino", de masă practic nulă.

Energiile de reacție se pot exprima în funcție de masele atomice M_Z sau de masele nucleare m_Z, scriind

$$Q_{\beta -} = [m_Z - (m_{Z-1} + m_e)] c^2 = (M_Z - M_{Z+1}) c^2 \approx 0{,}568 \text{ MeV}.$$

$$Q_{\beta +} = [m_Z - (m_{Z-1} + m_e)] c^2 = (M_Z - M_{Z-1} - 2m_e) c^2 \approx 0{,}72 \text{ MeV}.$$

$$Q_{C.E.} = [m_Z + m_e - m_{Z-1})] c^2 = (M_Z - M_{Z-1}) c^2 \approx 1{,}74 \text{ MeV}.$$

b) Deoarece $\Delta \equiv A - M$, se poate scrie

$$Q_{\beta -} = (\Delta_{Z+1} - \Delta_Z) c^2.$$

$$Q_{\beta +} = (\Delta_{Z-1} - \Delta_Z - 2 m_e) c^2$$

$$Q_{C.E.} = (\Delta_{Z-1} - \Delta_Z) c^2$$

6.34. $^{213}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{209}_{82}\text{Pb}$

$^{209}_{82}\text{Pb} \rightarrow e^- + {}^{209}_{83}\text{Bi}$

$W_\alpha = 2{,}737 \text{ MeV}; \; W_{e^-} = 0{,}695 \text{ MeV}.$

6.35. Sînt necesare trei perioade de înjumătățire.

6.36. Ni se indică aici activitatea radioactivă

$$A = \lambda N, \text{ unde } N = \frac{m\mathcal{N}}{A}, \text{ deci}$$

$$\lambda = \frac{A}{n\mathcal{N}/A} = \frac{3{,}7\cdot 10^7 \text{ dez/s}\cdot 226 \text{ g}}{10^{-3}\text{ g}\cdot 6{,}025\cdot 10^{23}} \approx 1{,}4\cdot 10^{-11}\text{ s}.$$

6.37. a) $e^{-0{,}2475} = 0{,}781$; b) 0,085; c) $\lambda = 7{,}86\cdot 10^{-8}\text{s}^{-1}$.
d) Activitatea după 100 ani este de 8,45 mCi.
e) Sursa va mai conține $4\cdot 10^{15}$ nuclee.

6.38. În condiții normale de temperatură și presiune, un atom-gram de gaz ocupă un volum de 22,4 l; se obține $t \approx 24{,}3$ d.

6.39. $V = 4{,}3$ mm³.

6.40. Procedînd ca în problema 6.19, găsim

$$M_{Pb} = M_U \frac{A_{Pb}}{A_U}\left(1 - e^{-\frac{0.693}{T_U}}\right) = 275 \text{ g}.$$

6.46. $W_\alpha = \frac{1}{2}mv^2 = NW_i$; $v = 1{,}74\cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

6.47. Curentul i va fi dat de relația

$$i = \frac{n}{t}Ne = \frac{600}{60\text{ s}}\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{ C} = 1{,}6\cdot 10^{-12}\text{ A}.$$

6.48. Conform datelor din enunț

$$n = 0{,}98\frac{W_\alpha}{W_i} = 0{,}98\cdot\frac{4{,}4\cdot 10^6}{34} \approx 126\,800 \text{ perechi de ioni}.$$

6.49. $i = \frac{n}{S\cdot t}\cdot S\cdot Ne = 1\frac{\text{mezon}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}\cdot\pi\cdot 400\text{ cm}^2\cdot$

$$\cdot 38\cdot 30 \text{ perechi ioni}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{ C} = 2{,}29\cdot 10^{-13}\text{ A}.$$

6.50. a) Curentul produs va fi: $i = n\frac{W_p}{W_i}$e, întrucît fiecare particulă produce un număr de perechi de ioni egal cu $\frac{W_p}{W_i}$.

b) Curentul produs va fi: $i = 20\cdot\frac{4\text{ MeV}}{34\text{ eV}}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$ A $=$
$= 3{,}8\cdot 10^{-13}$ A.

c) Pentru a afla parcursul unei particule α în aer, vom determina mai întîi numărul de perechi de ioni format

$$N = \frac{W_p}{W_i} \approx 1{,}18\cdot 10^5 \text{ perechi ioni}.$$

Întrucît, conform datelor experimentale din tabel, particulele α formează un număr de 26.000 perechi ioni pe fiecare parcurs de 1 mg/cm² în aer, rezultă parcursul

$$R = \rho x = \frac{1{,}18\cdot 10^5}{2{,}6\cdot 10^4} = 4{,}54 \text{ mg/cm}^2.$$

Parcursul masic observat (3,25 mg/cm²) este mai mic, întrucît ionizarea produsă nu este uniformă, fiind mai intensă la sfîrșitul parcursului particulei α, iar în calcul s-a presupus că ionizarea produsă de-a lungul parcursului este uniformă. Parcursul liniar va fi

$$x = \frac{R}{\rho} = \frac{4{,}5\text{ mg/cm}^2}{1{,}3\text{ mg/cm}^3} \approx 3{,}5\text{ cm}.$$

d) Pentru a calcula parcursul protonilor de 1 MeV vom folosi datele din tablou; se produc prin ionizare: $N = \frac{4\text{ MeV}}{34\text{ eV}} = 1{,}18\cdot 10^5$ perechi ioni; parcursul masic va fi

$$R = \rho x = \frac{1{,}18\cdot 10^5 \text{ perechi}}{6500\ \frac{\text{perechi}}{\text{mg/cm}^2}} = 18{,}15\text{ mg/cm}^2,$$

care corespunde unui parcurs liniar: $x = \frac{R}{\rho} = \frac{18{,}15}{1{,}3} \approx 14$ cm.

e) Particulele α de 4 MeV au practic același parcurs în aer N.T.P. (3,5 cm) ca și protonii de 1 MeV (3,54 cm).

6.51. a) Energia particulei va fi : $W_\alpha = 6{,}3 \text{ cm} \cdot 25\,000 \frac{\text{perechi}}{\text{cm}} \times$

$\times 34 \text{ eV} = 5{,}35 \text{ MeV} = 8{,}56 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

b) Din egalarea forței centrifuge cu forța Lorentz, obținem

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \text{ de unde } mv = qRB = \sqrt{2\, m_\alpha W_\alpha}.$$

Rezultă

$$W_\alpha = \frac{q^2R^2B^2}{2m} = \frac{(2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C})^2 \cdot (0{,}48)^2 \text{ m}^2 \cdot 0{,}495^2}{2 \cdot 4{,}0006 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ J} =$$

$$= 5{,}438 \text{ MeV}.$$

Rezultatele sînt consistente.

c) În aer uscat N.T.P., parcursul rezultă de 5,25 cm (vezi problema 6.50).

6.52. Din egalizarea forței centrifuge cu forța Lorentz rezultă $\frac{mv^2}{R} = evB$; pe de altă parte, energia ionilor este : $W = 1{,}6$ keV, fiind cunoscută, așa încît avem sistemul

$$\begin{cases} mv^2 = 2\,W \\ mv = eBR \end{cases} \text{ de unde } v = \frac{2W}{eBR} \text{ și } m = \frac{e^2B^2R^2}{2\,W}.$$

Efectuînd calculele numerice obținem

$$m_1 = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1826)^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ kg} = 1{,}667 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Cu datele din literatură, obținem

$m_1 = 10{,}013 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}672158 \cdot 10^{-26}$ kg, adică o masă foarte apropiată de cea determinată experimental.

Pentru al doilea izotop al borului, obținem

$$m_2 = 1{,}824 \cdot 10^{-26} \text{ kg, față de } m_{2\,\text{lit}} = 1{,}82759 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

6.53. $1{,}205 \cdot 10^{24}$ protoni sau neutroni într-un atom-gram de heliu, și $5{,}543 \cdot 10^{25}$ protoni, respectiv $8{,}616 \cdot 10^{25}$ neutroni într-un atom-gram de ^{235}U.

6.54. a) Fiecare nucleon contribuind (ipoteză) cu un volum v_0 la constituirea volumului nucleului, putem scrie

$$V = v_0 A = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot r_0^3 A$$

și de aici

$$v_0 = \frac{4}{3}\pi v_0^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 1{,}3^3 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3 = 9{,}2 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3.$$

Pentru a aprecia densitatea „materiei nucleare", vom considera că masa unui nucleon este aproximativ egală cu 1 u ; rezultă

$$\rho_N = \frac{M}{v_0} = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{9{,}2 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3} \approx 1{,}8 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

b) Să observăm că volumul unui nucleu se poate scrie în funcție de numărul masic sub forma

$$V = \frac{4}{3}\pi v_0^3 A = 9{,}2 \cdot 10^{-45} A \cdot \text{m}^3.$$

Relația ne indică deci înjumătățirea volumului.

c) Conform relației $R = v_0 A^{1/3}$, razele celor două nuclee vor fi

$$R_{Li} = 1{,}3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{6} \text{ m} = 3{,}185 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

$$R_C = 1{,}3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{12} \text{ m} = 4{,}5 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Obs. Nu se face o eroare dacă se consideră că volumele nucleare se compun aditiv, aceasta fiind tocmai ipoteza în care a fost stabilită relația semiempirică de calcul a volumului nuclear ; în realitate, această ipoteză conduce la o relație care reprezintă doar o primă aproximație a volumului nuclear.

6.55. a) Pentru a calcula densitatea substanței nucleare, vom scrie : $R = R_0 A^{1/3}$; $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$; iar masa nucleului respectiv va fi :

A u; rezultă pentru densitatea substanței nucleare

$$\rho_N = \frac{m}{V} = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27} A \text{ kg}}{\frac{4\pi}{3}(1{,}3)^3 \cdot 10^{-45} A \cdot \text{m}^3} = 1{,}8 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Densitatea substanței nucleare nu depinde de nucleul din care face parte nucleul respectiv. Pentru volumul nucleului de heliu vom avea

$$V_{\text{He}} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A; \quad M_{\text{He}} = \frac{A}{N_A}.$$

Densitatea nucleului de heliu va fi deci

$$\rho_{N(\text{He})} = \frac{A/N_A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 \text{A}} = \frac{\text{A(grame)}}{9{,}2 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3 \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ A}} = 1{,}8 \cdot 10^{17} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}.$$

b, c) Aceeași densitate vor avea în această aproximație și nucleul de deuteriu sau fier, densitatea substanței nucleare nedepinzînd de natura acestora.

d) Raportul dintre densitatea nucleului de fier și cea a fierului este

$$\left(\frac{\rho_N}{\rho}\right)_{\text{Fe}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3}{7{,}8 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3} = 2{,}57 \cdot 10^{13}.$$

6.56. a) Observăm că la sinteza (formarea) nucleului din particulele constitutive se eliberează o energie egală cu cea necesară dezintegrării. Deci

$$Zm_p + (A - Z)\, m_n = M + \Delta M$$

unde m_p este masa protonului, m_n masa neutronului, Z numărul de protoni, iar $A - Z$ numărul de neutroni din nucleu. Energia eliberată se disipează pînă la urmă sub formă de căldură. ΔM este defectul de masă, care constituie o măsură a energiei de legătură sau a stabilității nucleului.

Energia de legătură se va scrie folosind relația lui Einstein: $E = mc^2$, astfel

$$E = \Delta m \cdot c^2 = [Zm_p + (A - Z)\, m_n - M]\, c^2,$$

de unde rezultă energia de legătură per nucleon:

$$E\,(\text{leg. per nucleon}) = \frac{E}{A} = \frac{c^2}{A}[Zm_p + (A - Z)\, m_n - M].$$

b) În cazul nucleului de Be, avem

$$4 \cdot 1{,}00759 + 5 \cdot 1{,}00898 = 9{,}07526 \text{ u}.$$

De aici: $\Delta m = 9{,}07526 - 9{,}01503 = 0{,}06023$ u.

$Q = 0{,}06023 \text{ u} \cdot 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \approx 56{,}1$ MeV, căci masele electronilor se scad în ambii membri ai ecuației.

c) *Scara chimică* este cea în care unitatea atomică de masă*) este egală cu a 16-a parte din masa atomului de oxigen, iar în cea *fizică* unitatea atomică de masă este egală cu a 12-a parte din masa atomului de carbon. Calculul ne dă

$$\frac{1 \text{ u scara fizică}}{1 \text{ u scara chimică}} = 1{,}00027 \cdot$$

Pierderea unei unități atomice de masă revine în unități de energie, la: $1 \text{ u} = 8{,}99 \cdot 10^{20} \frac{\text{lg}}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}49 \cdot 10^{-3}$ erg $= 931$ MeV, unde $c^2 = 8{,}99 \cdot 10^{20} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}$, iar $1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg.

d) Putem afirma acum că un nucleu este stabil față de o dezintegrare dată dacă masa sa este mai mică decît suma particulelor (sau nucleelor mai ușoare) în care se poate descompune.

De exemplu: nucleul ${}^7_3\text{Li}$ este stabil față de dezintegrarea ${}^4_2\text{He} + {}^3_1\text{H}$. Într-adevăr, făcînd bilanțul masic, obținem

$m\ {}^4_2\text{He} = 4{,}60390$
$m\ {}^3_1\text{H} = 3{,}01702$
$\longrightarrow 7{,}02092$, iar masa ${}^7_3\text{Li}$ este numai 7,01822, adică avem un deficit de masă.

*) a.m.u. = atomic mass unit (engl.)

Cazul $^{8}_{4}$Be față de dezintegrarea 2 $^{4}_{2}$He. Avem masele: 8,00785 față de 8,00780 = 2·4,00390, adică avem un surplus de masă de 0,00005 u; deci nucleul $^{8}_{4}$Be nu este stabil și se va dezintegra conform schemei: $^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow 2\ ^{4}_{2}\mathrm{He}$.

6.57. Reacția de „scoatere" a unui proton din nucleul de He, este: $^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{3}_{1}\mathrm{T}$; defectul de masă rezultă din relația

$m_{\mathrm{He}} = m_p + m_{\mathrm{T}} + \Delta m$, iar energia cerută va fi

$$W = c^2\,\Delta m = (m_{\mathrm{He}} - m_p - m_{\mathrm{T}})\,c^2 \approx 19{,}7837\ \mathrm{MeV}$$

pentru un proton.

Analog pentru scoatarea unui neutron, avem

$$^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{3}_{2}\mathrm{He}$$

cu $\Delta m = m_{^4\mathrm{He}} - m_n - m_{^3\mathrm{He}}$, iar $W = mc^2 = 931\,\Delta m = 20{,}5192$ MeV. Energia de legătură a protonului în nucleu este mai mică decît energia de legătură a neutronului, datorită repulsiei electrostatice.

6.59. Conform definiției sale, unitatea atomică de masă reprezintă a douăsprezecea parte din masa unui atom de carbon — 12. Conform legii lui Avogadro un atom-gram de ^{12}C (care cîntărește 12 grame) conține $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ atomi; atunci, conform regulei de trei simplă

$$1\ \mathrm{u} = \frac{1}{12}\,\frac{12\ \mathrm{g}}{6{,}023\cdot 10^{23}} = 1{,}66\cdot 10^{-24}\ \mathrm{g} = 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}.$$

Energia corespondentă va fi dată de relația lui Einstein

$$W_u = mc^2 = 1{,}66\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}\ \mathrm{J} = 1{,}594\cdot 10^{-10}\mathrm{J} =$$
$$= 930\cdot 10^{6}\ \mathrm{eV} = 930\ \mathrm{MeV}.$$

6.60. Conform definiției, electronvoltul este energia cinetică a unui electron accelerat sub o diferență de potențial de 1 volt, adică folosind relația de definiție a energiei din electricitate $W = q\,(V_2 - V_1)$, obținem

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot 1\mathrm{V} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}6\cdot 10^{-12}\ \mathrm{ergi}.$$

Apoi: 1 kgm = 9,81 J; 1 cal = 4,18 J: 1 kWh = $3{,}6\cdot 10^{6}$ J și putem alcătui următorul tablou

	eV	J	erg	cal	kWh	kg m
eV	1	$1{,}6\cdot 10^{-19}$	$1{,}6\cdot 10^{-12}$	$3{,}83\cdot 10^{-20}$	$4{,}45\cdot 10^{-26}$	$1{,}63\cdot 10^{-20}$
J	$6{,}24\cdot 10^{18}$	1	10^{7}	0,239	$2{,}78\cdot 10^{-7}$	0,102
erg	$6{,}24\cdot 10^{11}$	10^{-7}	1	$2{,}39\cdot 10^{-8}$	$2{,}78\cdot 10^{-14}$	$1{,}02\cdot 10^{-8}$
cal	$2{,}61\cdot 10^{19}$	4,18	$4{,}18\cdot 10^{7}$	1	$1{,}16\cdot 10^{-6}$	0,427
kWh	$2{,}25\cdot 10^{25}$	$3{,}6\cdot 10^{6}$	$3{,}6\cdot 10^{13}$	$8{,}65\cdot 10^{5}$	1	$3{,}675\cdot 10^{5}$
kgm	$6{,}12\cdot 10^{19}$	9,81.	$9{,}81\cdot 10^{7}$	2,35.	$2{,}72\cdot 10^{-6}$	1

6.61. a) 1 atom-gram de ^{235}U conține $6{,}025\cdot 10^{23}$ atomi, care pun fiecare în libertate prin fisiune o energie de 200 MeV, adică în total

$$E = 6{,}023\cdot 10^{23}\cdot 2\cdot 10^{5}\ \mathrm{eV} = 1{,}2046\cdot 10^{29}\ \mathrm{eV}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}} =$$
$$= 1{,}93\cdot 10^{10}\ \mathrm{J} \approx 4{,}615\cdot 10^{6}\ \mathrm{kcal}.$$

Cantitatea de căldură eliberată prin ardere va fi Q = mq, de unde

$$m = \frac{Q}{q} = \frac{4{,}615\cdot 10^{6}\ \mathrm{kcal}}{8\cdot 10^{3}\ \mathrm{kcal/kg}} = 5{,}769\cdot 10^{2}\ \mathrm{kg} \approx 577\ \mathrm{kg}.$$

b) $W = mc^2 = 1\ \mathrm{g}\cdot (3\cdot 10^{10})^2\cdot \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2} = 9\cdot 10^{20}\ \mathrm{erg} = 2{,}5\cdot 10^{7}\ \mathrm{kWh}.$

6.62. Pentru a afla masa atomului respectiv, vom porni de la defectul de masă: $\Delta m = M_{\mathrm{Pb}} + M_{\mathrm{He}} - M_x$, care corespunde practic energiei de 5,3 MeV purtate de particule α. Rezultă

$$M_x = M_{\mathrm{Pb}} + M_{\mathrm{He}} + \frac{W\,\alpha}{931{,}15} \approx 210{,}04815\ \mathrm{u}.$$

Este deci vorba de dezintegrarea α a nuclidului ^{210}Po.

6.63. (Pentru prima coloană): $^{2}_{1}H$; $^{3}_{1}H$; $^{7}_{4}Be$; $^{4}_{2}He$; $^{8}_{4}Be$; $^{10}_{4}Be$; $^{6}_{3}Li$; $^{58}_{29}Cu$ etc. Evident, unele din produsele de reacție sînt radioactive și se dezintegrează la rîndul lor. Determinarea celorlalte produse de reacție se va face folosind legile de conservare ale reacțiilor nucleare și un tabel al lui Mendeleev sau o tabelă a izotopilor elementelor.

6.64. a) Diferența $(m_N + m_{He}) - (m_H + m_0)$ ne dă pentru bilanțul maselor

$Q = [(m_N + m_{He}) - (m_H + m_0)]\,c^2 = (18{,}01141 - 18{,}01262)\,c^2 = -$

$= -0{,}0121 \text{ u} \cdot 931 \dfrac{\text{MeV}}{\text{u}} = -1{,}13 \text{ MeV}$; reacția este endotermă.

b) În cazul reacției nucleare, fără a ține seama de semn, considerînd că în reacție intervine un mol de substanță, putem scrie

$$Q = 1{,}31 \cdot 10^{-6} \text{ ergi} \cdot 1{,}6 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}26 \cdot 10^{18} \text{ ergi} = 3{,}0 \cdot 10^{7} \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$$

adică o energie de $\sim 0{,}43$ milioane de ori mai mare.

În mod analog, pentru reacția $^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}He$, avem

$$m_{Li} = 7{,}01822 \qquad 2\ {}^{4}_{2}He = 2 \cdot 4{,}00390$$

$$m_H = 1{,}00812$$

$$\Delta m = 8{,}02634 - 8{,}00780 = 0{,}01854 \text{ u.}$$

În acest caz intervin 1 mol de Li (7 g) și 1 mol de H (1 g). Obținem

$$Q = 18{,}54 \cdot 10^{-3} \text{ u} \cdot 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{erg}}{\text{Mev}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} =$$

$= 4{,}06 \cdot 10^{8} \dfrac{\text{kcal}}{\text{mol}}$, adică o energie de circa 60 milioane de ori mai mare.

6.65. Poziția centrului de inerție este dată în sistemul laboratorului de expresia $\vec{r}_c = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ unde $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ sînt pozițiile celor două particule în sistemul laboratorului și are viteza $\vec{v}_c = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

Vitezele celor două particule față de centrul de inerție vor fi

$$\vec{v}_{1c} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$\vec{v}_{2c} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, iar energia lor față de sistemul centrului de inerție va fi

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m v_{1c}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{\mu}{2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \cdot$$

Deci: $$\boxed{E_{lab} = E_{ci} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v c^2} \cdot$$

Se vede de aici că, chiar dacă energia cinetică a particulei bombardante (în sistemul laboratorului) este egală cu energia de reacție, ea nu este suficientă pentru a provoca reacția, deoarece o parte din energie revine mișcării centrului de inerție. În cazul reacției $^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$, am avut $Q = -1{,}13$ MeV. Deci, dacă particula α ar avea o energie de reacție de 1,13 MeV, reacția ar putea avea loc (teoretic); și, totuși, reacția nu se produce pentru aceste energii ale particulei α.

Cazul particular cînd $v_2 = 0$: nucleul țintă stă pe loc. Atunci

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$E_{ci} = \frac{\mu}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = E_{lab} \frac{\mu}{m_1} = E_{lab} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{E_{lab} = E_{ci} \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \cdot$$

În cazul nostru reacția are loc numai dacă $E_{ci} = 1{,}13$ V, adică, față de sistemul de referință al laboratorului

$$E_{lab} = 1{,}13 \frac{14+4}{14} = \underline{1{,}45 \text{ MeV}}.$$

6.66. Se vede că $W_{prag} = \frac{7+4}{7}\left|Q\right| = \frac{11}{7}\left|Q\right|$.

Pentru a determina energia de reacție Q, vom scrie

$$Q = [(m_{He} + M_{Li}) - (m_n' + M_B')]\, c^2 = [(7{,}01600 + 4{,}00260) -$$

$$- (1{,}00866 + 10{,}01294)]\, c^2 = (-0{,}00300) \cdot 931 \approx (-2{,}8) \text{ MeV}.$$

Deci

$$W_{prag} = \frac{11\,(2{,}8)}{7} = 11{,}04 = 4{,}4 \text{MeV}.$$

6.67. $Q = 8\, W_{He} - 7\, W_{Li} = 8 \cdot 7{,}06 - 7 \cdot 5{,}61 = 17{,}2$ MeV.

6.68. Cazul ^3_1H : $\Delta = M - A = (m_p + 2\, m_n) - A = 1{,}00728 +$

$$+ 2 \cdot 1{,}00866 - A = 3{,}02460 - 3{,}01605.$$

Deci : $\Delta = 0{,}00855$ u $\rightarrow c^2 \Delta = 7{,}960$ MeV $= E_{leg}$.

Cazul ^3_2He : $\Delta = (2\, m + m) - A = (2 \cdot 1{,}00728 + 1{,}00866) -$

$$- 3{,}01603) = 0{,}007190 \text{ u}$$

$$E_{leg} = \Delta \cdot c^2 = 6{,}694 \text{ MeV}.$$

Deci, în cazul He energie de legătură este mai mică datorită repulsiei electrostatice a protonilor din nucleu.

6.69. Din legile de conservare ale impulsului și energiei, rezultă

$$p_\beta = p_B$$

$$Q = W_\beta + W_B$$

și întrucît $W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^2$, rezultă $p^2 c^2 = W^2 - m_0^2 c^4 =$

$$= (W - m_0 c^2)\ (W + m_0 c^2).$$

Însă $W = W_\beta + m_0 c^2$ și deci $p^2 c^2 = W_\beta (W_\beta + 2 m_0 c^2)$. Rezultă că, dacă luăm aproximativ $Q \approx W_\beta$, neglijînd W_B față de W_β, și admițînd că $W_{cin} = \frac{p^2}{2M}$, atunci

$$W \cdot 2c^2\, M_B = Q\,(Q + 2 m_0 c^2)$$

de unde

$$W_B = \frac{Q(Q + 2 m_0 c^2)}{2 M_B c^2} \quad \left(= \frac{p^2}{2 M_B}\right).$$

Determinarea energiei de reacție Q ne dă

$$Q = (M_Z - M_{Z-1} - 2\, m_e)\, c^2 = \left(\frac{11{,}01495}{c} - \frac{11{,}01284}{\text{B}} -\right.$$

$$\left. - \frac{0{,}00109}{2 m_e}\right) c^2 = 0{,}00102 \text{ u} \cdot 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = 0{,}95 \text{ MeV}.$$ De aici

$$W_B = \frac{0{,}95 \overbrace{[0{,}95}^{\text{MeV}} + \overbrace{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2}^{\text{ergi}}]}{2 \cdot 11{,}01284 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-24} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 \cdot 6{,}65 \cdot 10^5 \text{ MeV}}.$$

Luînd : $\begin{matrix} 1\text{u} = 1{,}6\cdot 10^{-24}\ \text{g} \\ 1\ \text{erg} = 6{,}25\cdot 10^{11}\ \text{eV} \end{matrix}$ găsim $W_B \approx \frac{0{,}95\ (0{,}95 + 1{,}05)}{(\ldots\ldots)} = 93\ \text{eV}.$

6.70. a) Defectul de masă al nuclidului $^{238}_{92}\text{U}$ va fi

$$\Delta m = 92 \cdot\ 1{,}00727 + 146 \cdot 1{,}00866 - 238 = 1{,}933\ \text{u}$$

căruia îi corespunde energia de legătură

$$W = 1{,}933 \cdot 930 = 1797{,}69\ \text{MeV}.$$

și energia de legătură per nucleon $W_1 = \frac{W}{238} = 7{,}55\ \text{MeV}.$

b) Întrucît prin fisiune se formează nuclee cu energia medie de legătură per nucleon de numai 8,4 MeV, rezultă că pentru fiecare nucleon se eliberează o energie : $\Delta W = 8{,}4 - 7{,}55 = 0{,}85$ MeV, iar la un act de fisiune se eliberează o energie de circa : $0{,}85 \cdot 238 = 202{,}3$ MeV. Experiența ne arată că energia eliberată la un act de fisiune este într-adevăr de circa 200 MeV.

6.71. a) O putere de 100 MW înseamnă o degajare de energie pe secundă egală cu $P = 10^8 \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{10^8}{10^6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{eV}}{\text{s}} = 6{,}25 \cdot 10^{20}\ \text{MeV/s}$. Pentru a produce o asemenea degajare de energie sînt necesare :

$$\frac{6{,}25 \cdot 10^{20}}{200} = 3{,}125 \cdot 10^{18}\ \frac{\text{fisiuni}}{\text{s}}.$$

b) Notînd cu N_U numărul de atomi de uraniu sau plutoniu care fisionează și echivalînd cu energia degajată de trotil, putem scrie

$$Q = N_U \cdot W_f = M_T J_T, \text{ unde } N_U = \frac{m_U \mathcal{N}}{A_U}; \text{ rezultă}$$

$$m_U = \frac{M_T J_T}{W_f} \frac{A_U}{\mathcal{N}} = \frac{2 \cdot 10^7\ \text{kg} \cdot 4{,}118 \cdot 10^6\ \text{J/kg} \cdot 0{,}235\ \text{kg}}{2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot 6{,}025 \cdot 10^{23}} = 1{,}19\ \text{kg}.$$

6.72. a) Energia de reacție va fi

$$Q = (M - M' - m)\ 931{,}48\ \text{MeV} = 7{,}38\ \text{MeV}.$$

b) Nucleul de uraniu este presupus a fi în repaus. Aplicînd legile de conservare ale impulsului și energiei, rezultă

$$0 = \vec{p'} + \vec{p} \quad \text{sau} \quad p'^2 = p^2$$

$$Q = \frac{p'^2}{2M'} + \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2} \frac{m + M'}{mM'}$$

și rezultă energiile cinetice

$$E_\alpha = \frac{p^2}{2m} = \frac{M'}{M' + m} Q \approx 7{,}3\ \text{MeV}$$

$$E_{Th} = \frac{p'^2}{2M'} = \frac{m}{M' + m} Q \approx 0{,}13\ \text{MeV}.$$

6.73. a) Indirect, rezultatele sînt indicate în enunț. b) Se rezolvă ca în 6.61.

6.74. În toate reacțiile, energia care intervine se datorește defectului de masă care există între masele nucleelor rezultate și cele inițiale. Scriind ecuația conservării energiei apare imediat cantitatea căutată.

a) $m = -2 \times 4{,}00386 + 6{,}01702 + 2{,}01474 = 0{,}02102$ u

$W = 0{,}02102 \times 931{,}16\ \text{MeV} = 22{,}36\ \text{MeV}.$

b) $m = -4{,}00387 - 3{,}01700 + 6{,}01702 + 1{,}00898 = 0{,}00513$ u

$W = 0{,}00513 \times 931{,}16\ \text{MeV} = 4{,}78\ \text{MeV}.$

c) $m = -(2 \times 4{,}00387 + 1{,}00898) + 6{,}01702 + 3{,}01700 = 0{,}01730$ u

$W = 0{,}01730 \times 931{,}16\ \text{MeV} = 16{,}10\ \text{MeV}.$

6.75 a) Ciclul lui Bethe, în urma căruia se formează atomii de heliu în soare, este următorul

$$^{12}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}p \longrightarrow ^{13}_{7}\text{N} \longrightarrow ^{13}_{6}\text{C} + e^+ + \nu$$

$$^{13}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}p \longrightarrow ^{14}_{7}\text{N}$$

$$^{14}_{7}\text{N} + ^{1}_{1}p \longrightarrow ^{15}_{8}\text{O} \longrightarrow ^{15}_{7}\text{N} + e^+ + \nu$$

$$^{15}_{7}\text{N} + ^{1}_{1}p \longrightarrow ^{12}_{6}\text{C} + ^{4}_{2}\text{He}$$

ceea ce ne dă, făcînd bilanțul

$$4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2e^{+} + 2\nu.$$

b) Această relație ne dă pentru defectul de masă al unui atom de heliu

$$m = 4m_{\mathrm{H}} - (m_{\mathrm{He}} + 2e^{+}) = 4 \cdot 1{,}00814 - 4{,}00387 -$$

$$-2 \cdot 0{,}00055 = 0{,}02759 \text{ u}$$

ceea ce corespunde eliberării unei energii egale cu energia de legătură

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m = 931 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \cdot 0{,}02759 \text{ u.} = 25{,}69 \text{ MeV}$$

pentru fiecare atom de heliu format.

Întrucît un atom-gram de heliu cîntărește 4 g și conține $6{,}025 \cdot 10^{23}$ atomi, rezultă că energia totală eliberată va fi :

$$E \cdot n = 25{,}69 \frac{\text{MeV}}{\text{atom}} \cdot \frac{1 \text{ g}}{4\text{g}} \cdot 6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ atomi} \approx 38{,}5 \cdot 10^{23} \text{ MeV}.$$

Exprimată în calorii, această energie ne dă $1{,}48 \cdot 10^{8}$ kcal, ceea ce corespunde arderii unei cantități de 18 500 tone cărbuni.

c) Reacția nucleară care are loc este

$${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Rezultă $m = 0{,}02402$ u, $W = 22{,}36$ MeV. Atunci energia totală va fi $W_{\text{tot}} = W \cdot \frac{1\,000}{8} \cdot \mathcal{N}$, unde $\frac{1\,000}{8}$ este numărul de moli dintr-un kilogram de LiD ; greutatea molară a ^{6}LiD este 8 g. Rezultă

$$W_{\text{tot}} = 22{,}36 \cdot 10^{6} \cdot \frac{1000}{8} \cdot 6 \cdot 10^{25} \cdot 3{,}83 \cdot 10^{-24} = 6{,}42 \cdot 10^{10} \text{ kcal}.$$

Cantitatea echivalentă de trotil este egală cu

$$M_{\text{trotil}} = \frac{6{,}42 \cdot 10^{10} \text{ kcal}}{1010 \text{ kcal/kg}} = 63\,500 \text{ tone}.$$

6.76. a) ${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + e^{+} + \nu$

${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma$

${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{2}\mathrm{H} + \mathrm{H}$

b) $Q = 24{,}7$ MeV.

6.77. Căldura (energia) de reacție pentru un singur neutron, este

$$W = \Delta m \cdot c^2 = \Delta m \cdot 931 \text{ (MeV)} \tag{1}$$

unde $\Delta m = (m_{^{12}\mathrm{C}} + m_{\mathrm{C}}) - m_{^{13}\mathrm{C}} = 0{,}00531$ u și

$$W = 0{,}00531 \cdot 931 \text{ MeV} = 4{,}94 \text{ MeV} \approx 7{,}9 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Numărul neutronilor care au produs reacția respectivă va fi

$$N = \frac{Q_i}{Q_1} = \frac{4180}{7{,}9 \cdot 10^{-13}} = 5{,}4 \cdot 10^{15} \text{ neutroni}.$$

Știind că numai $\eta = 0{,}0005$ % din neutroni produc reacția, rezultă că numărul inițial de neutroni, va fi

$$N_i = \frac{N}{\eta} \approx 1{,}1 \cdot 10^{21} \text{ neutroni}.$$

6.78. a) Ecuațiile reacțiilor nucleare ce se produc sînt

$$\gamma + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{1}_{0}n \quad \text{sau :} \quad {}^{2}_{1}\mathrm{D}\,(\gamma, n)\,{}^{1}_{1}p \tag{1}$$

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}p \longrightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad \text{sau} \quad {}^{7}_{3}\mathrm{Li}\,(p, \alpha)\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{2}$$

b) Necunoscînd masa deuteronului, nu putem calcula pe cale generală, energia lui de legătură. Dar diferența dintre energia cuantei (fotonului) incident și energia de reacție (egală cu energia de legătură în acest caz), este egală, conform legii conservării energiei cu suma energiilor cinetice ale protonului și neutronului (egale, între ele).

Deci $E - \Delta E \approx 2 E_1$, unde (3)

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4}$$

Pe de altă parte, $Bqv = \frac{mv^2}{R}$, $v = \frac{BqR}{m} = \frac{BeR}{m}$. (5)

Combinînd relaţiile (3), (4) şi (5), rezultă

$$E = \varepsilon - \frac{B^2 e^2 R^2}{m_p}.$$

c) Calculăm mai întîi energia de reacţie ce apare din ecuaţia (2)

$$m_{\mathrm{Li}} + m_p = 2\, m_\alpha + \Delta m.$$

Rezultă $\Delta m > 0$, deci energia de reacţie se degajă şi are valoarea

$$E = \Delta m \cdot c^2 = (m_{\mathrm{Li}} + m_p - 2\, m_\alpha)\, c^2. \tag{6}$$

Conform legii conservării energiei, energia cinetică a protonului (E_1) plus energia de reacţie (ΔE) este egală cu energia cinetică a celor două particule α, adică

$$E_1 + \Delta m \cdot c^2 = 2E_\alpha. \tag{7}$$

Combinînd relaţiile (6) şi (7) rezultă :

$$E_\alpha = \frac{E_1 + \Delta m c^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{B\, e^2 R^2}{2m} + (m_{\mathrm{Li}} + m_p - 2\, m_\alpha)c^2\right]. \tag{8}$$

d) Fiecare proton care produce reacţia dă naştere la o moleculă de heliu. Dar nu toţi protonii produc reacţii, încît

$$\eta = \frac{N_{mol}}{N_p} \tag{9}$$

unde N_{mol} este numărul de molecule de heliu necesare pentru a obţine presiunea respectivă, iar N_p numărul de protoni incidenţi. Pe de altă parte

$$pV = nRT \text{ sau } n = \frac{pV}{RT} \tag{10}$$

unde cu n am notat numărul de moli. Dar

$$N_{mol} = n\, N_A \tag{11}$$

unde N_A reprezintă numărul lui Avogadro. Combinînd (9), (10) şi (11) rezultă

$$N_p = \frac{N_{mol}}{\eta} = n\frac{N_A}{\eta} = \frac{1}{\eta} N_A \frac{pV}{RT} = 10 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{10\ \mathrm{N/m^2}\ 8{,}31 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}}{8{,}31\ \mathrm{J/^\circ K} \cdot 300\ ^\circ\mathrm{K}} =$$
$$= 3 \cdot 10^{21}.$$

6.79. a) Ecuaţia reacţiei este

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{218}_{84}\mathrm{Po}$$

b) Legile de conservare ale energiei şi impulsului, se scriu

$$E = E_\alpha + E_{\mathrm{Po}} \tag{1}$$

$$m_\alpha v_\alpha = m_{\mathrm{Po}} v_{\mathrm{Po}} \tag{2}$$

cu m_α şi m_{Po} masa particulei α şi masa nucleului de poloniu. Din relaţia (2) se obţine

$$m_\alpha E_\alpha = m_{\mathrm{Po}} E_{\mathrm{Po}}. \tag{3}$$

Combinînd relaţiile (1) şi (3), rezultă

$$E = E_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Po}}} E_\alpha = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Po}}}\right) \approx 6{,}21\ \mathrm{MeV}.$$

c) Din relaţia (1) rezultă (nerelativist)

$$E_{\mathrm{Po}} = E - E_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Po}} v_{\mathrm{Po}}^2}{2}$$

sau

$$V_{\mathrm{Po}} = \sqrt{\frac{2\,(E - E_{\mathrm{Po}})}{m_{\mathrm{Po}}}} = 680\ \mathrm{km/s}.$$

6.80. Fie m, $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ masa protonului, respectiv viteza acestuia înainte şi după ciocnire. Fie M şi $\vec{V}$, masa, respectiv viteza particulei ciocnite ; din legea conservării energiei, obţinem (clasic)

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

iar din legea conservării impulsului, proiectată pe direcția vitezei inițiale $\vec{u}$ (axa Ox) și pe o direcție perpendiculară pe acesta, dar cuprinsă în planul vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{V}$ (axa Oy)

$$mu = mv\cos\varphi + MV\cos\theta$$

$$0 = mv\sin\varphi - MV\sin\theta.$$

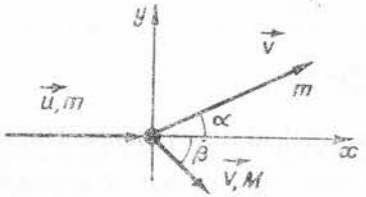


Fig. 6.80 R

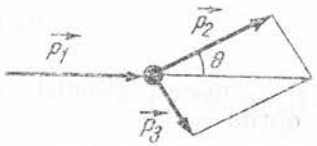


Fig. 6.81 R

Din ultima relație obținem $V = \frac{m}{M} v \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \sqrt{3}\,\frac{m}{M} v$; înlocuind această expresie în relațiile precedente, obținem

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{2}\frac{m^2}{M} v^2$$

$$mu = \frac{1}{2} mv + \frac{3}{2} mv$$

de unde $\frac{u}{v} = 2$ și rezultă $m = M$, adică particula ciocnită este tot un proton.

6.81. Din legea conservării energiei, rezultă

$$E_1 + Q = E_2 + E_3.$$

iar din legea conservării impulsului (fig. 6.81 R)

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \quad \text{sau} \quad p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta.$$

Folosind relația de legătură dintre energie și impuls scrisă nerelativist $\left(E = \frac{p^2}{2A}\right)$, obținem

$$A_3 E_3 = A_1E_1 + A_2E_2 - 2\sqrt{A_1A_2E_1E_2}\cos\theta.$$

Folosind această relație și legea conservării energiei, obținem

$$Q = \left(1 + \frac{A_2}{A_3}\right) E_2 - \left(1 - \frac{A_1}{A_3}\right) E_1 - 2\frac{\sqrt{A_1A_2E_1E_2}}{A_3}\cos\theta.$$

6.82. Din relațiile

$$m_n + m_B = m_{He} + m_{Li} + \Delta m \quad \text{și} \quad \Delta E = c^2 \cdot \Delta m.$$

Se calculează energia de reacție : $E = 2{,}79$ MeV. Deoarece $\Delta m > 0$, reacția este exotermă, energia degajată fiind preluată de produsele reacției : $\Delta E = W_\alpha + W_{Li}$. (Vom neglija energia cinetică a neutronului termic).

Din legea conservării impulsului, rezultă

$$m_\alpha v_\alpha = m_{Li} v_{Li} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2} m_\alpha^2 v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_{Li}^2 v_{Li}^2$$

$$m_\alpha W_\alpha = m_{Li} W_{Li}.$$

Rezultă pentru energia de reacție

$$\Delta E = W_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Li}}\right) = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Li}}\right)$$

apoi

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2m_{Li}\,\Delta E}{m_\alpha(m_\alpha + m_{Li})}} \approx 9{,}26\cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$v_{Li} = \sqrt{\frac{2\,m_\alpha\,\Delta E}{m_{Li}\,(m_\alpha + m_{Li})}} = 5{,}27\cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

6.83. Legea conservării energiei ne dă

$$W + Q = W_c + W_n$$

iar legea conservării impulsului

$$m_\alpha v_\alpha = m_c v_c \cos\theta \quad \text{(pe axa } Ox\text{)}$$

$$m_n v_n = m_c v_c \sin\theta \quad \text{(pe axa } Oy\text{)}.$$

Eliminînd unghiul θ, obţinem

$$m_\alpha W_\alpha + m_n W_n = m_c W_n.$$

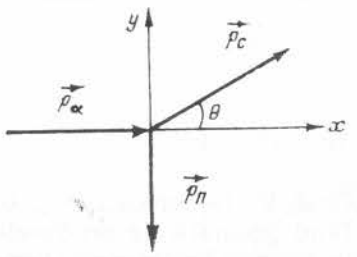


Fig. 6.8.3. R

Eliminînd acum energia carbonului W_c între această relaţie şi cea obţinută din legea conservării energiei, obţinem

$$W_n = \frac{m_c}{m_n + m_c}(W_\alpha + Q) - \frac{m_\alpha}{m_n + m_c} W_\alpha =$$

$$= \frac{m_c}{m_n + m_c}\left(Q + \frac{m_c - m_\alpha}{m_c} W_\alpha\right) \approx$$

$$\approx 8{,}52 \text{ MeV}.$$

6.84. 1a) Folosind ipotezele *a* şi *b*, putem scrie că numărul de nuclee radioactive dN_1 formate prin iradiere cu fluxul de neutroni Φ, într-un timp dt, este proporţional cu produsul Φdt, adică

$$dN_1 \sim \Phi\, dt. \tag{1}$$

1b) Pe de altă parte, numărul de nuclee radioactive formate într-o unitate de volum este proporţional cu numărul de nuclee N_0 existente în substanţa iradiată

$$dN_1 \sim N_0 \cdot \Phi\, dt. \tag{2}$$

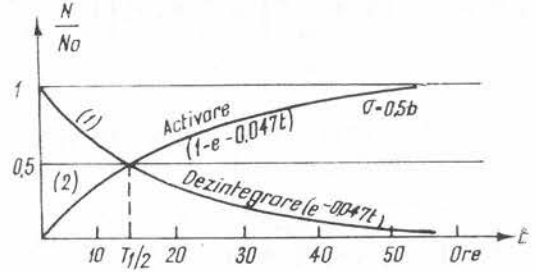


Fig. 6.84 R

Introducînd acum un parametru de proporţionalitate care ne indică mărimea probabilităţii reacţiei de activare, parametru care depinde *a*) de natura materialului (elementului) iradiat şi *b*) de energia neutronilor, putem scrie

$$dN_1 = \sigma \cdot N_0 \cdot \Phi\, dt. \tag{3}$$

Putem determina acum dimensiunile parametrului σ; dat fiind că N_1 şi N_0 reprezintă un număr de nuclee, iar $[\Phi] = L^{-2} \cdot T^{-1}$, rezultă ecuaţia dimensională $[\sigma] = L^{-2}\, T^{-1} \cdot T = [0]$, de unde $[\sigma] = L^2$, secţiunea eficace exprimîndu-se în cm², sau într-un submultiplu al acestei unităţi, barnul (1 barn = 10^{-24} cm²).

1c) Cum nucleele radioactive formate se şi dezintegrează conform legii de dezintegrare radioactive, putem scrie că în timpul dt se dezintegrează un număr dN_2 de nuclee

$$dN_2 = \lambda N\, dt \tag{5}$$

unde N este numărul de nuclee radioactive existente la un moment dat, iar λ este constanta de dezintegrare radioactivă.

Numărul dN de nuclee radioactive rămas după timpul dt, se află ca diferenţa dintre aceste două procese, adică putem scrie

$$dN = dN_1 - dN_2 = N_0 \sigma\, \Phi\, dt - \lambda N\, dt \tag{6}$$

relaţie care se mai poate scrie şi astfel

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = N_0 \sigma \Phi. \tag{6'}$$

Expresia (6') reprezintă o ecuaţie diferenţială liniară de primul ordin, cu coeficienţi constanţi, a cărei soluţie, în ipoteza că în momentul iniţial $t = 0$ nu avem nuclee radioactive ($N = 0$), se scrie

$$N = \frac{N_0}{\lambda} \sigma \cdot \Phi\, (1 - e^{-\lambda t}). \tag{7}$$

2) Pentru a trece la activitatea specifică, vom observa că într-un gram de substanţă există $\frac{\mathcal{N}}{A}$ atomi, unde $\mathcal{N}$ este numărul lui Avogadro, ρ este densitatea, iar A numărul masic. Vom avea deci

$$\Lambda = \lambda N = \frac{\mathcal{N}}{A} \sigma\, \Phi\, (1 - e^{-\lambda t}). \tag{8}$$

Înlocuind $\mathcal{N} = 6 \cdot 10^{23}$, şi exprimînd σ în barni (10^{-24} cm²), obţinem

$$\Lambda_{\text{specific}} = \frac{0{,}6\, \Phi\, \sigma}{A}(1 - e^{-\lambda t}) \left(\frac{\text{dez/s}}{g}\right). \tag{9}$$

Pentru a exprima activitatea specifică în $\frac{\text{mCi}}{\text{g}}$, trebuie să împărțim expresia precedentă cu $3{,}7 \cdot 10^7$; cum la acest punct al problemei ni se cere activitatea maximă posibilă (în timp) care se poate obține la cobalt, să ne imaginăm că am iradia un timp infinit proba dată; obținem pentru activitatea specifică

$$\Lambda_{s\infty} = \lim_{t \to \infty} \Lambda_s = \frac{0{,}6\ \Phi\ \sigma}{A} \frac{\text{dez/s}}{\text{g}}. \qquad (10)$$

Pentru un flux de $2 \cdot 10^{13}$ $n/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$ și $\sigma_{Co} = 37 \cdot 10^{-24}$ cm^2, obținem, exprimînd rezultatul în Curie pe gram

$$\Lambda_{s\infty} \approx \frac{0{,}6 \cdot 2 \cdot 10^{13} \cdot 37}{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 59} \approx 203 \frac{\text{Ci}}{\text{g}}.$$

3) Curbele de activare și de dezintegrare ale $^{23}_{11}\text{Na}$ și $^{24}_{11}\text{Na}$ sînt redate în fig.6.84 R. În abscisă a fost reprezentat timpul, în ore, iar în ordonată raportul $\frac{N}{N_0}$ pentru curba de dezintegrare ($^{24}\text{Na} \xrightarrow{14.8 \text{ ore}} {}^{24}\text{Mg} + \beta^-$), și raportul $\frac{N}{N_\infty}$ pentru curba de activare ($^{23}\text{Na}\ (n, \gamma)\ ^{24}\text{Na}$). Remarcăm că cele două curbe „se intersectează" (formal) după un timp egal cu perioada de înjumătățire $\left(\text{cînd raportul } \frac{N}{N_i} = 0{,}5\right)$, reprezentînd două procese inverse. Ambele curbe prezintă un caracter de saturație (pentru $t \to \infty$), limita curbei de dezintegrare fiind 0, iar a celei de activare $\frac{N}{N_\infty} = 1$. Calculul absolut al numărului de nuclee radioactive obținute nu mai este necesar în acest caz, deoarece problema cere doar reprezentarea rapoartelor $\frac{N}{N_0}$ și $\frac{N}{N_\infty}$.

6.85. a) În cazul cînd reactorul nuclear (sursa de neutroni) funcționează numai un anumit număr de ore pe zi (sau de zile pe săptămînă), vom nota cu t_1 și t_2 intervalele de timp de funcționare și de repaus dintr-o zi ale reactorului, adică vom scrie : $t_1 + t_2 = 1$ zi.

Să admitem că după 1 zi de iradiere se obțin N_1 nuclee radioactive. Raționamentul pentru stabilirea formulei de caclul a activității corectate este următorul :

După 1 zi de iradiere se obțin N_1 nuclee radioactive, valoare la stabilirea căreia se ține seama de dezintegrarea produsă în timpul iradierii.

După altă zi de iradiere se obțin $(N_1 e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} + N_1)$ nuclee radioactive, căci nucleele radioactive din ziua precedentă s-au dezintegrat deja parțial (durata de dezactivare de 1 zi este socotită de la finele iradierii dintr-o zi pînă la finele iradierii din cea de a doua zi).

După o altă zi obținem $(N_1 e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} + N_1)\, e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} + N_1 =$

$$= N_1 + N_1 e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} + N_1 e^{-\lambda \cdot 2\,\text{zile}}.$$

După z zile de activare, vom obține numărul total de nuclee radioactive

$$N_{\text{total}} = N_1 + N_1 e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} + N_1 e^{-\lambda \cdot 2\,\text{zile}} + \ldots + N_1 e^{-\lambda(z-1)\,\text{zile}}$$

sau

$$N_{\text{total}} = N_1 \frac{1 - e^{-\lambda \cdot z\,(\text{zile})}}{1 - e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}}} = \frac{0{,}6\ \Phi \sigma}{A \cdot \lambda} (1 - e^{-\lambda \cdot t_1}) \frac{1 - e^{-\lambda \cdot z\,(\text{zile})}}{1 - e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}}}$$

care reprezintă tocmai formula corectată căutată.

b) Pentru a calcula activitatea per gram obținută după 1 zi pentru cobalt, observăm că perioada de dezintegrare a cobaltului ($T_{1/2} = 5{,}26$ ani) este cu mult mai mare decît cele 8 ore de activare zilnică; dezvoltînd în serie expresia

$$1 - e^{-\lambda t_1} = 1 - e^{\frac{-0{,}693\,t}{T_{1/2}}} \approx \frac{0{,}693\ t}{T_{1/2}}$$

și analog

$$1 - e^{-\lambda \cdot 1\,\text{zi}} = \frac{0{,}693 \cdot 1\ \text{zi}}{T_{1/2}};$$

scriind formula precedentă pentru activitatea specifică, obținem, dezvoltînd în serie pentru acest caz

$$\Lambda_s = \frac{0{,}6\ \Phi\ \sigma}{A} (1 - e^{-\lambda z}) \frac{1 - e^{-\lambda t_1}}{1 - e^{-\lambda \cdot 1\text{zi}}} = \frac{0{,}6\ \Phi \sigma}{A} (1 - e^{-\lambda z}) \frac{0{,}693\ t_1 / T_{1/2}}{0{,}693 \dfrac{1\ \text{zi}}{T_{1/2}}}$$

adică activitatea obținută este în raportul $\frac{t_1}{1\,\text{zi}} = \frac{1}{3}$, față de activitatea ce s-ar putea obține dacă reactorul ar funcționa continuu. În cazul nostru, vom obține

$$\Lambda_s = \frac{0{,}6\,\Phi\sigma}{A}(1-e^{-\lambda\cdot z})\cdot\frac{1}{3} = 203\ \frac{\text{Ci}}{\text{g}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}693\cdot t_{\text{iradiere (zile)}}}{5{,}26\ \text{ani}\cdot 365\ \text{zile/an}}}\right).$$

Paranteza ne dă 0,124 și în final

$$\Lambda_{s\ \text{necorectat}} = 203\cdot 0{,}124\,\frac{\text{Ci}}{\text{g}} = 25{,}2\,\frac{\text{Ci}}{\text{g}}$$

$$\Lambda_{s\ \text{corectat}} = \frac{1}{3}\Lambda_{s\ \text{necorectat}} = 8{,}4\,\frac{\text{Ci}}{\text{g}}.$$

În mod analog, într-o primă aproximație putem scrie pentru proba iradiată 4 zile din 7

$$\Lambda_{s\ \text{corectat}} \approx \frac{4}{7}\cdot 25{,}2\,\frac{\text{Ci}}{\text{g}} = 14{,}4\,\frac{\text{Ci}}{\text{g}}.$$

Evident, în ambele cazuri corecțiile sînt semnificative față de cazul iradierii continue.

6.86. Cuprul natural conține doi izotopi: ^{63}Cu (69,1 %) și ^{65}Cu (30,9 %), cu secțiunile de activare și timpii de înjumătățire ai izotopilor formați prin activare de 4,5 barni și 12,9 ore, respectiv de 1,8 barni și 5,15 min.

Cum izotopul 65 se activează dînd naștere unui izotop radioactiv ^{66}Cu, cu $T_{1/2} = 5{,}15$ min (față de 12,9 ore pentru celălalt izotop al cuprului) este probabil că izotopul de viață scurtă ajunge la saturație mai înainte ca izotopul de viață lungă să atingă cei 0,35 $\frac{\text{Ci}}{\text{g}}$ ceruți; din acest motiv, vom calcula mai întîi activitatea dobîndită prin iradiere cu neutroni de izotopul 65. Obținem, considerînd că iradierea cu neutroni durează un timp mai lung de 10 perioade de înjumătățire ale izotopului de viață scurtă și notînd cu α abundența izotopică,

$$\Lambda_s = \frac{0{,}6\,\Phi\sigma\alpha}{A}(1-e^{-\lambda t}) = \frac{0{,}6\,\Phi\sigma\alpha}{A} = \frac{0{,}6\cdot 10^{12}\cdot 1{,}8\cdot 0{,}309}{65\cdot 3{,}7\cdot 10^{10}}\ \frac{\text{Ci}}{\text{g}} \approx$$

$$\approx 0{,}139\ \text{Ci/g}.$$

Restul de $350 - 139 = 211\ \frac{\text{mCi}}{\text{g}}$ se obține pe seama activării izotopului cu 12,9 ore perioadă de înjumătățire. Trebuie să avem

$$211\cdot 3{,}7\cdot 10^7\,\frac{\text{dez}}{\text{s}} = \frac{0{,}6\cdot 10^{12}\cdot 4{,}5\cdot 0{,}691}{63}(1-e^{-\lambda t})\,\frac{\text{dez}}{\text{s}}$$

de unde rezultă $e^{-\lambda t} = 0{,}737$ și logaritmînd $-\frac{0{,}639\,t}{12{,}9\ \text{ore}}\cdot 0{,}4343 = -1 + 0{,}86756$, $t \approx 5{,}6$ ore, deci cu mult mai mult decît era necesar pentru ca izotopul de viață scurtă să atingă activitatea de saturație. Acest mod de a rezolva problema ne evită rezolvarea ecuației exponențiale pe care am obținut-o dacă am egala suma activităților celor doi izotopi cu valoarea cerută în problemă.

6.87. a) $W_1 = 4{,}35259$ MeV; $W_2 = 3{,}28643$ MeV;

$W_3 = 17{,}58659$ MeV; $W_4 = 18{,}85275$ MeV.

b) Cele patru reacții ar produce: $\Sigma W_i = 44{,}07836$ MeV. 1 litru de apă conține $n = \frac{1000}{18}N$ molecule de apă obișnuită și deci $\frac{1000}{18}\cdot\frac{6\cdot 10^{23}}{6000} = \frac{1}{18}10^{23}$ molecule de apă grea. „Arderea" ^2_1H în cele patru reacții produce în medie 11,01959 MeV; fiecare moleculă conținînd doi atomi de deuteriu, se va produce un număr de reacții egal cu numărul de molecule și o energie medie totală

$$W_{\text{total}} = \frac{10^{23}}{18}\cdot 11{,}01959\ \text{MeV}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-13}\,\frac{\text{J}}{\text{MeV}} \approx 9{,}78\cdot 10^6\ \text{J}.$$

Pentru a afla cîtă benzină produce prin ardere aceeași cantitate de căldură, vom scrie $m = \frac{W}{q} = \frac{9\cdot 78\cdot 10^9\ \text{J}}{4{,}6\cdot 10^7\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 212{,}6$ kg, sau $\frac{212{,}6}{0{,}8} = 266$ l benzină.

c) Pentru a elibera prin fisiunea nucleelor de uraniu aceeași cantitate de energie, ar fi necesar un număr de

$$n = \frac{10^{23}}{18}\cdot\frac{11{,}0196}{200} = 3{,}06\cdot 10^{20}\ \text{fisiuni}.$$

Admițînd că toți atomii de uraniu fisionează, este necesară o cantitate de uraniu $m_U = \frac{n}{N} \cdot A = \frac{3{,}06 \cdot 10^{20}}{6{,}023 \cdot 10^{23}} \cdot 235 = 116\,\text{mg}$.

d) Timpul respectiv este : $t = \frac{9{,}78 \cdot 10^9\ \text{J}}{589\ \frac{\text{J}}{\text{h}} \cdot 10^6} = 16{,}9\ \text{h}$.

6.88. 118,5 MeV ; 7,4 MeV.

6.89. a) $m_e = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ u.

b) $m_{^1_1\text{H}} = 1{,}00782$ u.

c) $m_{^2_1\text{H}} = 2{,}014$ u.

6.90. V. problema 6.61.

6.91. R : a) ${}^1_0n$; b) ${}^{17}_8\text{O}$; c, d) ${}^1_1p$.

6.92. a) ${}^{32}_{16}\text{S} + n \longrightarrow {}^{32}_{15}\text{P}^* + p$

${}^{32}_{15}\text{P}^* \longrightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + \beta$;

$\Delta m = m_s + m_n - (m_p + m_p) = -\ 0{,}00046\ \text{u} \Rightarrow -\ 0{,}428\ \textbf{MeV}$; reacție endoenergetică.

b) Numărul de particule β culese în $\Delta t = 1$ min va fi

$$\Delta N_\beta = -\frac{C\,\Delta\theta}{W} = 3 \cdot 10^{17}$$

și numărul inițial de nuclee de radiofosfor

$$\Delta N_P = \frac{\Delta N_\beta \cdot T}{t \ln 2} = 9{,}35 \cdot 10^{21}.$$

Masa de sulf iradiată este

$$m_S = \frac{100 \cdot \Delta N_P}{\mathcal{N}} \cdot A_S \approx 50\ \text{g}.$$

CUPRINS

Prefață 5

Partea întîi
OPTICA

1. **Optică geometrică** (M. Stan) 7
2. **Optică ondulatorie** (D. Iordache) 42
3. **Optică fotonică** (I. M. Popescu) 83

Partea a doua
RELATIVITATEA

4. **Teoria relativității restrînse** (I. M. Popescu) 93

Partea a treia
FIZICA ATOMICĂ

5. **Fizica atomică** (V. Fochianu) 106

Partea a patra
FIZICA NUCLEARĂ

6. **Fizică nucleară** (G. Ionescu) 139

Răspunsuri și rezolvări 167